Universita' di Roma Tor Vergata

Esame di Geometria 1 (Prof. Ghione)
aa. 2007-08
25 febbraio 2008

Nome e Cognome ....
Giustificare le risposte. Rispondere innanzitutto alle domande contrassegnate da un asterisco.

Esercizio 1
Dare la definizione di base ortonormale.

Esercizio 2
Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a)* Calcolare il rango della matrice C=A.B.
b)* Sia L_C l'applicazione lineare definita dalla matrice C. Dire quale è il dominio e quale il codominio di L_C e calcolare la dimensione e una base del nucleo di L_C.
c) Se A è una generica matrice di rango r e B una generica matrice di rango s, cosa possiamo dire sul rango della matrice C=A.B?

Esercizio 3
Fissato nello spazio euclideo un sistema di riferimento cartesiano (O,**i**,**j**,**k**) sia σ la sfera di equazione:

$$(1) \qquad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = z$$

a)* Calcolare il centro e il raggio della sfera σ.
b)*Spiegare perché il punto A di coordinate (1/6,1/6,1/3) appartiene alla sfera σ e calcolare le coordinate del punto A' antipodale di A. (Due punti di una sfera si dicono antipodali se si trovano su uno stesso diametro)
c) Dimostrare che se le coordinate (a,b,c) di un punto della sfera σ definita dall'equazione (1) sono numeri razionali, anche le coordinate del punto A' antipodale di A sono numeri razionali.

Esercizio 4

Sia V lo spazio vettoriale formato da tutti i polinomi di grado minore o uguale a 3

a)* Calcolare la dimensione di V e una sua base

b)* Sia F l'applicazione di V in $\mathbf{R}^2$ che trasforma il generico polinomio p(x) di V nella coppia ordinata (p(1), p(-1)) di $\mathbf{R}^2$. Dimostrare che F è lineare e calcolare la dimensione e una base per il nucleo di F.

c) Sia V lo spazio vettoriale formato da tutti i polinomi di grado minore o uguale a n e siano $x_1, x_2, \dots, x_m$ m numeri reali a due a due distinti. Sia F l'applicazione (lineare) di V in $\mathbf{R}^m$ che trasforma il generico polinomio p(x) di V nella m-upla ordinata $(p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_m))$. In quali casi possiamo dire che Ker F = $\{\mathbf{0}\}$? Questo ci dice qualcosa sul numero di soluzioni di una equazione algebrica?