1.(a) Considerare il gruppo additivo $\mathbb{Z}_9$. Calcolare $L_{\bar{3}}$: $\mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_9$, $\bar{x} \mapsto \bar{x} + \bar{3}$ e verificare che induce una permutazione degli elementi di $\mathbb{Z}_9$.

(b) Considerare il gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_9^*$. Calcolare $L_{\bar{5}}$: $\mathbb{Z}_9^* \to \mathbb{Z}_9^*$, $\bar{x} \mapsto \bar{5}\bar{x}$ e verificare che induce una permutazione degli elementi di $\mathbb{Z}_9^*$.

2. Siano $(G_1, *)$ e $(G_2, \cdot)$ due gruppi e sia $\phi: G_1 \to G_2$ un isomorfismo. Dimostrare che
   (a) $\phi(e_1) = e_2$, dove e_1 ed e_2 sono rispettivamente l'elemento neutro di G_1 e di G_2.
   (b) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$, per ogni $g \in G$.

3. Determinare gli ordini di tutti gli elementi del gruppo additivo $\mathbb{Z}_9$. Determinare gli ordini di tutti gli elementi del gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_9^*$.

4. Determinare esplicitamente un isomorfismo $\phi: (\mathbb{Z}_4, +) \to (\{\pm 1, \pm i\}, \cdot)$ ed un isomorfismo $\phi: (\mathbb{Z}_8^*, \cdot) \to (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ (aiutarsi con le tabelle moltiplicative dei gruppi).

5. Sia G un gruppo e sia $a \in G$ un elemento di ordine k (per definizone k è il piu' piccolo intero per cui $a^k = e$).
   (a) Mostrare che le potenze $\{a, a^2, \ldots, a^k = e\}$ di a sono tutte distinte.
   (b) Mostrare che $a^n = e$ se e solo se $k \mid n$, ossia n è un multiplo intero di k.

6. Enunciare il teorema di Lagrange per i seguenti gruppi

$$\mathbb{Z}_{12}, \quad \mathbb{Z}_{100}, \quad \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{17}, \quad \mathbb{Z}_{7^3}.$$

   Per ognuno dei gruppi qui sopra elencare i possibili ordini degli elementi.

7. Esercizi 5 del 2017.