(1) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare le formule per la traslazione $T_{\mathbf{p}}$.

(ii) Calcolare $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(iii) Calcolare $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(iv) Calcolare $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

*Sol.* (i) Si ha

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T_{\mathbf{q}+3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = T_{3\mathbf{p}-\mathbf{q}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(2) Sia $Q$ il trapezio in $\mathbf{R}^2$ di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo la traslazione $T_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)}$.

(ii ) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo la riflessione $S_0$ data dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(iii) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo la rotazione $R_\pi$ data dalla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

*Sol.* (i) Si tratta del trapezio di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si tratta del trapezio di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Si tratta del trapezio di vertici

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(3) Sia $Q$ il quadrato in $\mathbf{R}^2$ di vertici

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.
(ii) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo la rotazione $R_\pi$.
(iii) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo la rotazione $R_{3\pi/2}$.
(iv) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo la dilatazione $D_{2,3}$.
(v) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo l'omotetia $D_2$.
(vi) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo lo shear $N_{-1}$.

*Sol.* (i) La rotazione $R_{\pi/2}$ è data dalla matrice $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$, dunque l'immagine di $Q$ è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}.$$

(ii) La rotazione $R_\pi$ è data dalla matrice $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$, dunque l'immagine di $Q$ è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}.$$

(iii) La rotazione $R_{3\pi/2}$ è data dalla matrice $\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$, dunque l'immagine di $Q$ è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}.$$

(iv) La dilatazione $D_{2,1}$ è data dalla matrice $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, dunque l'immagine di $Q$ è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}.$$

(v) L'omotetia $D_3$ è data dalla matrice $\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$, dunque l'immagine di $Q$ è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix}.$$

( vi) Lo shear $N_3$ è dato dalla matrice $\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}$, dunque l'immagine di $Q$ è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}.$$

(4) Sia $Q$ il quadrato in $\mathbf{R}^2$ di vertici

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.
(ii) Per quali angoli $\varphi$ la rotazione $R_\varphi$ manda il quadrato in se stesso?

(iii) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo la rotazione $R_{\pi/4}$.
(iv) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo la dilatazione $D_{2,1}$.
(v) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo l'omotetia $D_3$.
(vi) Disegnare l'immagine di $Q$ dopo lo shear $N_3$.

*Sol.* (i) La rotazione $R_{\pi/2}$ è data dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dunque l'immagine di $Q$ è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente coincide con $Q$. (ii) Per tutti gli angoli della forma $\varphi = k\pi/2$, con $k \in \mathbf{Z}$. (iii) La rotazione $R_{\pi/4}$ è data dalla matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$, dunque l'immagine di $Q$ è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iv) La dilatazione $D_{2,3}$ è data dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, dunque l'immagine di $Q$ è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(v) L'omotetia $D_2$ è data dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, dunque l'immagine di $Q$ è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

( vi) Lo shear $N_{-1}$ è dato dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dunque l'immagine di $Q$ è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(5) Siano $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ i punti di $\mathbf{R}^2$ di coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(i) Per quali angoli $\varphi$ la rotazione $R_\varphi$ manda l'esagono di vertici $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ in se stesso?

*Sol.* (i) Per tutti gli angoli della forma $\varphi = k\pi/3$, con $k \in \mathbf{Z}$.

(6) Sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
(i) Trovare le formule per la rotazione $R$ di centro $\mathbf{p}$ ed angolo $\pi/2$.
(ii) Trovare le formule per la rotazione $R'$ di centro $\mathbf{p}$ ed angolo $-\pi/4$.
(iii) Sia $l$ la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando $R$ ad $l$.

(iv) Sia $m$ la retta di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando $R'$ ad $l$.

*Sol.* (i) $R\mathbf{x} = R_{\pi/2}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{p}$. Poiché la rotazione $R_{\pi/2}$ è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, troviamo

$$R\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - 2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

(ii) $R'\mathbf{x} = R_{\pi/4}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{p}$. Poiché la rotazione $R_{\pi/4}$ è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$, troviamo

$$R\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$$

(iii) I punti della retta $l$ sono quelli della forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ -1 + t \end{pmatrix}$. Applicando la formula trovata nel punto (i), troviamo che l'immagine della retta $l$ tramite la trasformazione $R$ è una retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - t \\ 1 + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(iv) I punti della retta $m$ sono quelli della forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - t \\ t \end{pmatrix}$. Applicando la formula trovata nel punto (ii), troviamo che l'immagine della retta $m$ tramite la trasformazione $R'$ è una retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}-2}{2} - \sqrt{2}t \\ \frac{9\sqrt{2}-2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}-2}{2} \\ \frac{9\sqrt{2}-2}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero, mediante un cambio di parametro,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}-2}{2} \\ \frac{9\sqrt{2}-2}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(7) Sia $l$ la retta di equazione $x_1 + x_2 = 0$.
(i) Calcolare le formule della riflessione rispetto ad $l$.
(ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

*Sol.* (i) La retta $l$ è generata dal vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ di norma 1. Questo vettore si completa ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ come

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, la matrice che rappresenta la riflessione rispetto a $l$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dunque la matrice che rappresenta la riflessione rispetto a $l$ nella base canonica di $\mathbf{R}^2$ è

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

*Alternativamente.* Sia $\theta$ l'angolo formato dalla retta con l'asse delle $x_1$ positive. Allora, dalle coordinate di $\mathbf{v}$, troviamo $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$ e $\sin\theta = -1/\sqrt{2}$. Usando le formule di duplicazione di $\cos\theta$ e $\sin\theta$ ricaviamo la matrice della riflessione rispetto ad $l$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Alternativamente.* Sia $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un generico punto in $\mathbf{R}^2$. La retta per $P$ e perpendicolare ad $l$ ha equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Essa interseca $l$ nel punto $Q = \begin{pmatrix} (a-b)/2 \\ -(a-b)/2 \end{pmatrix}$, corrispondente al valore del parametro $t_0 = -(a+b)/2$. Il punto $S_l(P)$, simmetrico di $P$ rispetto ad $l$, corrisponde al valore del parametro $2t_0$ ed è dato da

$$S_l(P) = \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

(ii) Si tratta dei punti

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) I punti della retta in questione hanno la forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -t \end{pmatrix}$. Applicando la formula trovata al punto (i), troviamo che l'equazione parametrica della retta riflessa è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(8) Sia $Q$ il quadrato dell'Eserc.3. Calcolare l'immagine di $Q$ dopo la riflessione rispetto
  (i) all'asse delle ascisse.
  (ii) all'asse delle ordinate.
  (iii) alla retta di equazione $x_1 = x_2$.

*Sol.* (i) E' il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(ii) E' il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Coincide con $Q$.

(9) Sia $Q$ il quadrato dell'Eserc.4. Calcolare l'immagine di $Q$ dopo la riflessione rispetto
  (i) all'asse delle ascisse.
  (ii) all'asse delle ordinate.
  (iii) alla retta di equazione $x_1 = x_2$.
  (iv) Trovare tutte le riflessioni $S_\varphi$ che mandano $Q$ in se stesso.

*Sol.* (i) Coincide con $Q$. (ii) Coincide con $Q$. (iii) Coincide con $Q$. (iv) Oltre a quelle indicate nei punti (i), (ii) e (iii), c'è anche la riflessione rispetto alla retta $x_1 = -x_2$.

(10) Siano $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ i punti dell'Eserc.5. Calcolare l'immagine dell'esagono di vertici $Q_i$ dopo la riflessione rispetto
  (i) all'asse delle ascisse.
  (ii) all'asse delle ordinate.
  (iii) la retta di equazione $\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$.
  (iv) Trovare tutte le riflessioni $S_\varphi$ che mandano l'esagono in se stesso.

*Sol.* (i) Coincide con l'esagono dato. (ii) Coincide con l'esagono dato. (iii) Coincide con l'esagono dato. (iv) Oltre a quelle indicate nei punti (i), (ii) e (iii), ci sono anche le riflessione rispetto alle rette $\sqrt{3}x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0$ e $x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0$.

(11) Sia $S$ la riflessione rispetto alla retta $l$ di equazione cartesiana $3x_1 + 4x_2 = 0$.
  (i) Calcolare la tangente dell'angolo $\varphi$ formato da $l$ con l'asse delle ascisse.
  (ii) Calcolare le formule per $S$.

*Sol.* (i) I vettori della retta $l$ hanno la forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. Sia $\theta$ l'angolo $\varphi$ formato da $l$ con l'asse delle ascisse. Avendo scelto il vettore della direzione $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$ di $l$ di norma 1, troviamo $\cos\varphi = 4/5$ e $\operatorname{sen}\varphi = -3/5$ e di conseguenza

$$\tan\varphi = -3/4.$$

(ii) Usando le formule di duplicazione di $\cos\theta$ e $\sin\theta$ ricaviamo la matrice della riflessione $S$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/25 & -24/25 \\ -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}.$$

*Alternativamente*: Una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ con il primo vettore parallelo alla direzione di $l$ è

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

La riflessione rispetto a $l$, nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, dunque, nella base canonica si $\mathbf{R}^2$ la riflessione rispetto a $l$ è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7/25 & -24/25 \\ -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}$$

da cui

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{25}\,x_1 - \frac{24}{25}\,x_2 \\ \\ -\frac{24}{25}\,x_1 - \frac{7}{25}\,x_2 \end{pmatrix}$$

(12) Sia $S$ la riflessione rispetto alla retta $l$ di equazione cartesiana $3x_1 + 4x_2 = 0$.

(i) Calcolare le formule della riflessione $S_0$ rispetto all'asse delle ascisse.

(ii) Vedere se

$$S = R_\varphi \circ S_0 \circ R_{-\varphi},$$

dove $\varphi$ e' l'angolo formato dalla retta $l$ con l'asse delle ascisse. (Suggerimento: calcolare le formule per $R_\varphi$ e per $S$).

*Sol.* (i) Si ha

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

(ii) La matrice che rappresenta $R_\varphi$ è

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

( vedi esercizio 11), mentre la matrice che rappresenta $R_{-\varphi}$ è

$$\begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Pertanto la matrice che rappresenta $R_\varphi \circ S_0 \circ R_{-\varphi}$ è

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/25 & -24/25 \\ -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}$$

cioé coincide con la matrice che rappresenta $S$, ovvero

$$S = R_\varphi \circ S_0 \circ R_{-\varphi}.$$

(13) Sia $l$ la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}$$

e sia $m$ la retta di equazione $x_1 = 0$.

(i) Trovare le formule della riflessione $S$ rispetto ad $l$.

(ii) Calcolare le formule della riflessione $S'$ rispetto ad $m$.

(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

(iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

(v) Geometricamente, che cosa fanno $S \circ S'$ e $S' \circ S$?

*Sol.* (i) Il vettore $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ è un vettore parallelo alla retta $l$, di norma 1. Una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ il cui primo vettore sia $\mathbf{e}_1$ è

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

In questa base la riflessione rispetto alla retta $l$ è rappresetata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dunque la matrice che rappresenta la riflessione rispetto ad $l$ nella base canonica di $\mathbf{R}^2$ è

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(ii) La retta $m$ è l'asse delle ordiante. Dunque

$$S'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(iii)

$$(S \circ S')\mathbf{x} = S(S'\mathbf{x}) = S\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$(S' \circ S)\mathbf{x} = S'(S\mathbf{x}) = S'\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

(v) La matrice che rappresenta $S \circ S'$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^2$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}) \\ \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

Vale a dire: $S \circ S'$ è la rotazione di angolo $-\pi/2$ attorno all'origine. La matrice che rappresenta $S' \circ S$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^2$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Vale a dire: $S' \circ S$ è la rotazione di angolo $\pi/2$ attorno all'origine.

(14) Sia $l$ la retta di equazione $x_1 = 1$ e sia $m$ la retta di equazione $x_2 = 2$.
  (i) Calcolare le formule della riflessione $S$ rispetto ad $l$.
  (ii) Calcolare le formule della riflessione $S'$ rispetto ad $m$.
  (iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

  (iv) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

  (v) Geometricamente, che cosa fanno $S \circ S'$ e $S' \circ S$?

*Sol.* (i) Un punto di $l$ è $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La riflessione rispetto a $l$ è $S\mathbf{x} = A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{p}$, dove $A$ rappresenta la riflessione rispetto alla retta vettoriale avente la stessa direzione di $l$. La matrice che rappresenta la trasformazione lineare $A$ è $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, da cui

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(ii) Un punto di $m$ è $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. La riflessione rispetto a $m$ è $S'\mathbf{x} = A'(\mathbf{x} - \mathbf{q}) + \mathbf{q}$, dove $A'$ rappresenta la riflessione rispetto alla retta vettoriale avente la stessa direzione di $m$. La matrice che rappresenta la trasformazione lineare $A'$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, da cui

$$S'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 + 4 \end{pmatrix}$$

(iii) Si ha
$$(S \circ S')\mathbf{x} = S\left(S'\mathbf{x}\right) = S\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1+2 \\ -x_2+4 \end{pmatrix}$$
(iv) Si ha
$$(S' \circ S)\mathbf{x} = S'\left(S\mathbf{x}\right) = S'\begin{pmatrix} -x_1+2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1+2 \\ -x_2+4 \end{pmatrix} = (S \circ S')\mathbf{x}$$
(v) Sono la rotazione di angolo $\pi$ attorno al punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ di intersezione tra $l$ e $m$ (verificarlo!).

(15) Calcolare autovalori e autospazi della matrice
$$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in \mathbf{R}.$$

Interpretare geometricamente il risultato.

*Sol.* La matrice data rappresenta la riflessione rispetto all'asse delle ascisse seguita dalla rotazione di angolo $2\varphi$ attorno all'origine. Si ha
$$\det\begin{pmatrix} \cos 2\varphi - \lambda & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$$
pertanto gli autovalori della matrice data sono
$$\lambda_{1/2} = \pm 1$$
Per determinare l'1-autospazio risolviamo
$$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi - 1 & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
La dimensione di un autospazio è compresa tra 1 e la molteplicià algebrica dell'autovalore corrispondente. Dunque lo spazio delle soluzioni di questo sistema avrà dimensione esattamente uguale ad uno. Ricordiamo che
$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\varphi; \qquad \operatorname{sen} 2\varphi = 2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi$$
e dunque il sistema si può riscrivere come
$$\begin{pmatrix} -2\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Le soluzioni di questo sistema contengono le soluzioni del sistema
$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
la cui soluzione è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$. Per le ragioni dimensionali espresse sopra, l'1 autospazio è dunque esattamente la retta $l_\varphi$ che forma un angolo $\varphi$ con l'asse delle ascisse, ovvero la trasformazione lineare data fissa la retta $l_\varphi$. Essendo una isometria lineare deve pertanto essere la riflessione rispetto a $l_\varphi$: l'altro autospazio è la retta ortogonale a $l_\varphi$, formata dai vettori della forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$.

(16) Calcolare gli autovalori della matrice
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in \mathbf{R},\ \varphi \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Interpretare geometricamente il risultato. Cosa succede per $\varphi = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ ?

*Sol.* La matrice data rappresenta la rotazione di angolo $\varphi$ attorno all'origine. Si ha

$$\det \begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda \cos\varphi + 1$$

pertanto gli autovalori della matrice data sono

$$\lambda_{1/2} = \cos\varphi \pm \sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

(ovvero, per chi conosce la formula di Eulero, $\lambda_{1,2} = e^{\pm\sqrt{-1}\,\varphi}$ ). Ne segue che, per $\varphi \neq k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$, la matrice data non ha autovalori reali e dunque non ci sono rette fissate dalla trasformazione lineare associata. Per $\varphi = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, gli assi coordinati sono rette fissate dalla rotazione data.

(17) Sia $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Interpretare geometricamente l'isometria $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$.

*Sol.* Si ha $M = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\operatorname{sen}\pi/4 \\ \operatorname{sen}\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix}$, dunque $M$ è la rotazione di centro $\mathbf{0}$ e angolo $\pi/4$.

(18) Sia $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Interpretare geometricamente l'isometria $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$.

*Sol.* Si ha $M = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\operatorname{sen}\pi/4 \\ \operatorname{sen}\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, dunque $M$ è la riflessione rispetto all'asse delle ascisse seguita dalla rotazione di centro $\mathbf{0}$ e angolo $\pi/4$.

(19) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare l'orientazione di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
   (ii) Calcolare l'orientazione di $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$.
   (iii) Sia $S_0$ la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Calcolare $\operatorname{Or}(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w}))$.
   (iv) Sia $S_\varphi$ la riflessione rispetto alla retta passante per $\mathbf{0}$ e formante un angolo $\varphi$ con l'asse delle ascisse. Calcolare $\operatorname{Or}(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w}))$.

*Sol.* (i) Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

dunque $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono orientati positivamente. (ii) $\operatorname{Or}(\mathbf{w}), \mathbf{v}) = -\operatorname{Or}(\mathbf{v}), \mathbf{w})$ dunque $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ sono orientati negativamente. (iii) $\operatorname{Or}(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w})) = \det(S_0)\operatorname{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\operatorname{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ (iv) $\operatorname{Or}(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w})) = \det(S_\varphi)\operatorname{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\operatorname{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

(20) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (i) Sia $R_{\pi/2}$ la rotazione di centro $\mathbf{0}$ e angolo $\pi/2$. Calcolare $\operatorname{Or}(R_{\pi/2}(\mathbf{v}), R_{\pi/2}(\mathbf{w}))$.
   (ii) Sia $R_\varphi$ la rotazione di centro $\mathbf{0}$ e angolo $\varphi$. Calcolare $\operatorname{Or}(R_\varphi(\mathbf{v}), R_\varphi(\mathbf{w}))$.

*Sol.* (i) I vettori sono quelli dell'esercizio precedente, sappimao pertanto che sono orientati positivamente. $\operatorname{Or}(R_{\pi/2}(\mathbf{v}), R_{\pi/2}(\mathbf{w})) = \det(R_{\pi/2})\operatorname{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \operatorname{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. (ii) $\operatorname{Or}(R_\varphi(\mathbf{v}), R_\varphi(\mathbf{w})) = \det(R_\varphi)\operatorname{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \operatorname{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

(21) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Siano $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(t)}$ le riflessioni rispetto a delle rette passanti per $\mathbf{0}$. Sia $S = S^{(1)} \circ S^{(2)} \circ \ldots \circ S^{(t)}$. Calcolare l'orientazione $\operatorname{Or}(S(\mathbf{v}), S(\mathbf{w}))$.

*Sol.* $\operatorname{Or}(S(\mathbf{v}), S(\mathbf{w})) = \det(S)\operatorname{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(S^{(1)}) \cdots \det(S^{(t)})\operatorname{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (-1)^t\operatorname{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

(22) Sia $D_{2,5}$ la dilatazione data dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
   (i) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ tale che $D_{\lambda,\mu} \circ D_{2,5}$ sia l'applicazione identica.

(ii) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ tale che $D_{2,5} \circ D_{\lambda,\mu}$ sia l'applicazione identica.

*Sol.* Osserviamo innanzitutto che le dilatazioni commutano fra loro: date due dilatazioni $D_{\lambda,\mu}$ e $D_{\sigma,\tau}$ si ha

$$D_{\lambda,\mu} \circ D_{\sigma,\tau} = D_{\sigma,\tau} \circ D_{\lambda,\mu} = D_{\lambda\sigma,\mu\tau}.$$

(i)(ii) La dilatazione $D_{1/2,1/5}$, che è l'inversa di $D_{2,5}$, soddisfa $D_{1/2,1/5} \circ D_{2,5} = D_{2,5} \circ D_{1/2,1/5} = Id$.

(23) Per quali dilatazioni $D_{\lambda,\mu}$ abbiamo che $D_{\lambda,\mu} \circ D_{\lambda,\mu}$ è l'applicazione identica?

*Sol.* Si ha che $D_{\lambda,\mu} \circ D_{\lambda,\mu} = Id$ se e solo se $\lambda^2 = \mu^2 = 1$, ossia se e solo se $\lambda = \pm 1$, $\mu = \pm 1$. Pertanto le dilatazioni con questa proprietà sono 4.

(24) Dimostrare che una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ conserva le direzioni delle rette se e solo se $\lambda = \mu$.

*Sol.* Se $\lambda = \mu$, la dilatazione $D_{\lambda,\lambda}$ conserva gli angoli fra i vettori e quindi le direzioni delle rette:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{\lambda\mathbf{v}\cdot\lambda\mathbf{w}}{\|\lambda\mathbf{v}\|\|\lambda\mathbf{w}\|}, \quad \forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbf{R}^2. \tag{$*$}$$

D'altra parte, se $\lambda \neq \mu$, la dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ non conserva gli angoli fra i vettori e quindi ne anche le direzioni delle rette: basta provare per esempio con $\lambda = 4$, $\mu = 1$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(25) Calcolare l'inversa della trasformazione (shear) $N_5$.

*Sol.* L'inversa $N_5^{-1}$ è data dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$. Pertanto

$$N_5^{-1}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - 5x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$