Analisi 1/3 Ingegneria dei Modelli e Sistemi (Geatti) 1° esonero Roma 1 aprile 2008, 16:00–18:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare e sintetiche.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. *Siano dati* $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ *e* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare una base ortonormale di U.
   (b) Completarla ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.
   (c) Decomporre P *come somma* $P = A + B$, *con* $A \in U$ *e* $B \in U^\perp$.

(a) U è un sottospazio di dimensione 2 (un piano per l'origine) in $\mathbf{R}^3$. In forma parametrica $U = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$.
Una base ortonormale di U è data da

$$\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \}.$$

(ortogonalizzare la base $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ con G-S, e poi normalizzare i vettori ottenuti).

(b) Dall'equazione di U si ha che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è ortogonale ad U. Una base ON di $\mathbf{R}^3$ i cui primi due vettori sono unan base ON di U è dunque

$$\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \}.$$

(c) Poiché $\mathbf{R}^3 = U \oplus U^\perp$, il vettore si scrive in modo unico come

$$P = \pi_U(P) + \pi_{U^\perp}(P),$$

dove π_U e $\pi_{U^\perp}$ sono rispettivamente le proiezioni ortogonali su U e su $U^\perp$:

$$B = \pi_{U^\perp}(P) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \pi_U(P) = P - \pi_{U^\perp}(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Sia* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *un generico vettore di* $\mathbf{R}^3$ *e sia* U *il sottospazio dell'esercizio precedente.*
   (a) Determinare $\pi_U(X)$, *dove* $\pi_U \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *è la proiezione ortogonale su* U.
   (b) Determinare autovalori e autospazi di π_U *(per ogni autovalore esibire una base del corrispondente autospazio).*

(a) Sia $\{u_1, u_2\}$ una base ortogonale di U. Allora

$$\pi_U(X) = \frac{X \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{X \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2.$$

Se prendiamo $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, troviamo

$$\pi_U(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Per ogni $X \in U$, vale $\pi_U(X) = X$. Questo significa che ogni vettore di U è autovettore di π_U di autovalore 1.
Per ogni $X \in U^\perp$, vale $\pi_U(X) = O$. Questo significa che ogni vettore di $U^\perp$ è autovettore di π_U di autovalore 0 (ossia sta nel nucleo di π_U).
In conclusione $U = V_1$ e $U^\perp = V_0 = \ker \pi_U$. Ogni base di U è una base di V_1. Ogni base di $U^\perp$ è una base di V_0 (vedi esercizio precedente).

3. *Dato* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$, *determinare e disegnare l'insieme* $A = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid \cos \widehat{X\mathbf{v}} = 1/2\}$, *dove* $\widehat{X\mathbf{v}}$ *denota l'angolo fra* X *e* $\mathbf{v}$.

Il vettore $\mathbf{v}$ è un vettore di norma 1 che forma un angolo $\theta = \pi/3$ con l'asse delle ascisse positive. Ricordiamo che $\cos \pi/3 = 1/2$. Quindi si vede subito che l'asse delle ascisse positive è una semiretta contenuta in A. Precisamente A è dato dall'unione di due semirette: l'asse delle ascisse positive e la semiretta che forma un angolo $2\pi/3$ con l'asse delle ascisse positive.
Analiticamente:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in A \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + \sqrt{3}x_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \Rightarrow \quad x_2(x_2 + \sqrt{3}x_1) = 0.$$

In altre parole A è contenuto nell'unione dell'asse x_1 e della retta di equazione $x_2 + \sqrt{3}x_1 = 0$.

4. *Sia* $M = \begin{pmatrix} -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$ *e sia* $L_M \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare associata data da* $X \mapsto MX$.
   (a) Richiamare la definizione di isometria.
   (b) Verificare che L_M *è un'isometria.*
   (c) Dare un'interpretazione geometrica di L_M.

(a) Un'isometria di $\mathbf{R}^n$ è un'applicazione $F \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ che conserva le distanze, ossia tale che: $d(F(X), F(Y)) = d(X, Y)$, per ogni $X, Y \in \mathbf{R}^n$. Equivalentemente, $\|F(X) - F(Y)\| = \|X - Y\|$, per ogni $X, Y \in \mathbf{R}^n$.
(b) Possiamo dimostrare che l'applicazione lineare L_M è un'isometria verificando che $\|MX\|^2 = \|X\|^2$, per ogni $X \in \mathbf{R}^3$:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (-4/5x_1 + 3/5x_2)^2 + (-x_2)^2 + (3/5x_1 + 4/5x_2)^2.$$

Oppure osservare che la matrice rappresentativa di L_M (nella base canonica, che è ortonormale) è una matrice M ortogonale, cioè che soddisfa ${}^tM \cdot M = I_3$.
(c) Se calcolimao gli autovalori di M troviamo $\lambda = 1$ con molteplicità uno, e $\lambda = -1$ con molteplicità due. Questo ci dice che L_M è una rotazione intorno alla retta data dall'autospazio V_1. L'autospazio V_{-1} è un piano ortogonale a V_1, mandato in sè da L_M: per ogni $X \in V_{-1}$, vale $L_M(X) = -X$. Su questo piano L_M è una rotazione di angolo $\theta = \pi$.

5. *Sia data la conica* $\mathcal{C}$ *di equazione* $2\sqrt{2}x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2 + 1 = 0$.
   (a) Determinare una forma canonica metrica di $\mathcal{C}$.
   (b) Determinare un cambiamento di coordinate isometrico che la porti in tale forma.
   (c) Determinare due punti su $\mathcal{C}$ *e i due punti corrispondenti nella forma canonica metrica.*

(a) Consideriamo la forma quadratica associata a $\mathcal{C}$:

$$2\sqrt{2}x_1x_2 + x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A ha autovalori $\lambda = 2$ e $\lambda = -1$, con autospazi dati rispettivamente da $V_2 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\}$ e $V_{-1} = \text{span}\{\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Il cambiamento di coordinate isometrico

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

elimina i termini misti di secondo grado e porta l'equazione nella forma

$$2X_1^2 - X_2^2 + \frac{(1+\sqrt{2})}{\sqrt{3}} X_1 + \frac{(1-\sqrt{2})}{\sqrt{3}} X_2 + 1 = 0.$$

Poiché entrambi i termini di secondo grado sono presenti, possiamo trovare una traslazione che elimina entrambi i termini di primo grado:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 + \alpha \\ \bar{X}_2 + \beta \end{pmatrix},$$

con $\alpha = \frac{-(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{3}}$ e $\beta = \frac{(1-\sqrt{2})}{4\sqrt{3}}$. L'equazione diventa alla fine

$$2\bar{X}_1^2 - \bar{X}_2^2 + (\alpha^2 - 2\beta^2 + \alpha\frac{(1+\sqrt{2})}{\sqrt{3}} + \beta\frac{(1-\sqrt{2})}{\sqrt{3}} + 1) = 0.$$

Poiché il termine noto è diverso da zero, si tratta di un'iperbole.

(b) Il cambiamento di coordinate richiesto è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, con M, α, β trovati al punto precedente.

(c) Determiniamo due punti che soddisfano l'equazione di $\mathcal{C}$: basta intersecare $\mathcal{C}$ con una retta opportuna. Ad esempio una retta verticale, una retta orizzontale, una bisettrice.... Trattandosi di un'iperbole, prima o poi qualche punto si trova:

$$\mathcal{C} \cap \{x_2 = 0\} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C} \cap \{x_2 = -1\} = \begin{pmatrix} -1/(1-2\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I punti corrispondenti nella forma canonica metrica saranno $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ ed $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ tali che

$$M \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/(1-2\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$