Analisi 1/3 Ingegneria dei Modelli e Sistemi (Geatti) 2° esonero Roma 28 aprile 2008, 10:00–12:00.

COGNOME ..... *NOME* .....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare e sintetiche*.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7,5 punti.

1. *Sia data la curva piana* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\sin t + \cos t \\ t\cos t - \sin t \end{pmatrix}$, *per* $t > 0$.
   (a) Determinare i punti regolari di γ. *Calcolare la retta tangente a* γ *in* $\gamma(\pi/2)$.
   (b) Dire se γ *è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Determinare la lunghezza del tratto di* γ *parametrizzato dall'intervallo* $]0, 5]$.
   (c) In generale, se una curva γ *è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, quanto è lungo il tratto di curva parametrizzato dall'intervallo* $[0, T]$*?*

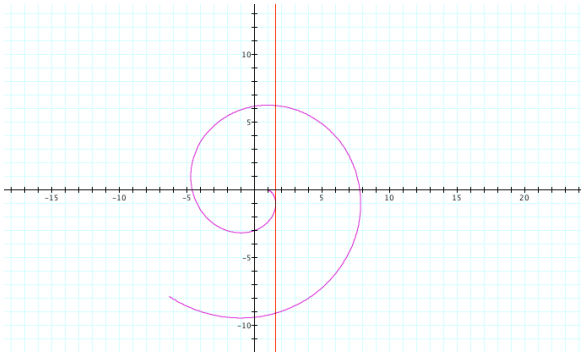
(a) Vale $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ -t\sin t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, per ogni $t > 0$. Da cui si deduce che γ è regolare in ogni punto. La retta tangente a γ in $\gamma(\pi/2)$ è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \gamma(\pi/2) + \alpha\gamma'(\pi/2) = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

(b) Poiché $\|\gamma'(t)\| = t \not equiv 1$, la curva non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Il tratto di γ parametrizzato dall'intervallo $]0, 5]$ ha lunghezza

$$L(\gamma([0,5])) = \int_0^5 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^5 t dt = \frac{1}{2}t^2|_0^5 = 25/2.$$

(c) In generale, se una curva γ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, il tratto di curva parametrizzato dall'intervallo $[0, T]$ ha lunghezza T.



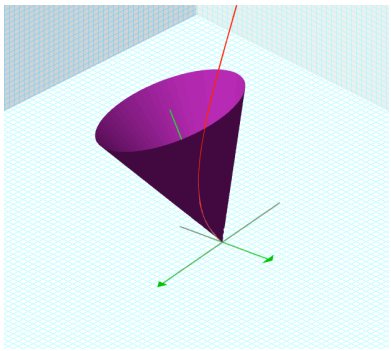
2. *Siano date la curva spaziale* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2\cos t \\ t^2\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$, *per* $t > 0$, *e la superficie* $\mathcal{S}$ *di equazione* $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$.
   (a) Fare un disegno approssimativo di $\mathcal{S}$ *(tagliarla con piani orizzontali...).*
   (b) Verificare che la curva γ *giace su* $\mathcal{S}$.
   (c) Cosa possiamo dire sulla curvatura e sulla torsione di γ *al crescere di* t*? (non sono richiesti calcoli; è sufficiente rispondere in base all'interpretazione geometrica di curvatura e torsione).*

La superficie in questione è un cono. Tutti i punti della curva soddisfano l'equazione $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, ossia per ogni $t > 0$ vale

$$(t^2\cos t)^2 + (t^2\sin t)^2 = t^4.$$

Dunque γ giace su $\mathcal{S}$. A mano a mano che γ si avvolge sul cono (che si allarga al crescere di x_3), la sua curvatura diminuisce. La torsione invece aumenta. Intutitivamente si vede dal fatto che che la derivata

$\gamma_3'(t) = 2t$ è positiva. Quindi la pendenza del piano osculatore aumenta. Più precisamente, il coseno delll'angolo formato da γ' con l'asse x_3, che è dato da $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \cdot e_3 = \frac{2}{\sqrt{8+t^2}}$ e tende a zero per $t \to +\infty$.



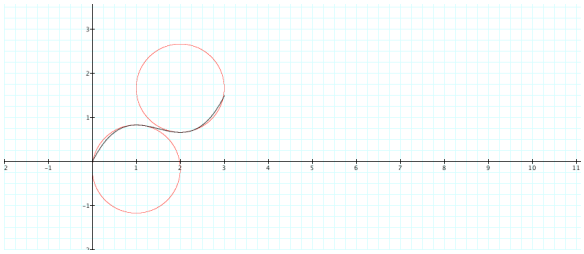
3. *Sia data la curva piana* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \end{pmatrix}$, *per* $t \in [0,3]$.

   (a) Fare un disegno preciso di γ *indicando il senso di percorrenza.*

   (b) In base al disegno determinare il segno della curvatura con segno $\kappa_s(t)$ *di* γ*, al variare di* t*.*

   (c) In base al disegno, dire per quali t *la curvatura* $\kappa(t)$ *è massima. In tali punti calcolare* $\kappa(t)$ *e disegnare il cerchio osculatore alla curva. (Spiegare bene).*

(a) La curva γ è il grafico della funzione $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t$. In particolare è regolare in tutti i punti. Ovviamente la curva è percorsa da sinistra verso destra. Studiando f sull'intervallo $[0,3]$ si trova che f ha un massimo locale uguale a $5/6$ per $t = 1$ e un minimo locale uguale a $2/3$ per $t = 2$. Ha inoltre un flesso per $t = 3/2$.



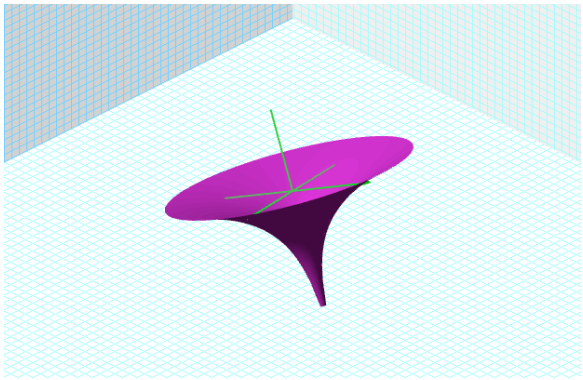
(b) La curvatura con segno è positiva per $t \in]0, 3/2[$, nulla per $t = 3/2$ e positiva per $t \in]3/2, 3[$.
(c) La curvatura è massima per $t = 1$ e $t = 2$ dove vale 1. I cerchi osculatori hanno raggio 1 e centro dato rispettivamente da $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 5/3 \end{pmatrix}$.

4. *Consideriamo la superficie* $S(u,v) = \begin{pmatrix} v\cos u \\ v\sin u \\ \log v \end{pmatrix}$, *per* $u \in [0, 2\pi]$, $v > 0$, *raffigurata qui sotto.*

   (a) Calcolare i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale in $P = S(\pi/2, 1)$*.*

   (b) Dire di che tipo di punto si tratta e che segno ha la curvatura gaussiana in P*.*

   (c) Cosa si può dire degli altri punti della superficie? (Aiutarsi con la figura).



(a) Dai soliti calcoli, i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di S in P risultano

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 2, \qquad e = -1/\sqrt{2}, \quad f = 0, \quad g = 1/\sqrt{2}.$$

(b) Poiché la seconda forma fondamentale è indefinita, il punto P è iperbolico. In p‘rticolare la curvatura gaussiana di S in P è negativa. Risulta infatti $K(P) = -1/4$.
(c) Tutti i punti di S sono iperbolici. La superficie è ottenuta ruotando la curva data dal grafico della funzione logaritmo $\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ \log v \end{pmatrix}$ intorno all'asse x_3. Dalla figura si vede che per ogni punto passano due curve con la concavità rivolta in senso opposta: la curva che ruota e la circonferenza ottenuta tagliando S con un opportuno piano orizzontale.