Nei primi tre esercizi è già istruttivo verificare i dettagli per $n = 2$ ed $n = 3$...)

1. Considerare l'azione standard di $SO(n)$ su $\mathbf{R}^n$.
   (a) Verificare che l'azione e' fedele (non ci sono elementi non banali del gruppo che agiscono come l'identità).
   (b) Determinare le orbite e i sottogruppi di isotropia corrispondenti.
   (c) Verificare che lo spazio delle orbite è di Hausdorff.
   (d) Estendere le stesse considerazioni al caso dell'azione standard di $U(n)$ su $\mathbf{C}^n$.

2. Considerare l'azione standard di $GL(n, \mathbf{R})$ (risp. $SL(n, \mathbf{R})$) su $\mathbf{R}^n$.
   (a) Verificare che l'azione è fedele.
   (b) Determinare le orbite e i sottogruppi di isotropia corrispondenti.
   (c) Verificare che lo spazio delle orbite non è di Hausdorff.
   (d) Estendere le stesse considerazioni al caso dell'azione standard di $GL(n, \mathbf{C})$ su $\mathbf{C}^n$.

3. Verificare che $GL(n+1, \mathbf{R})$ e $SO(n+1)$ operano transitivamente su $\mathbf{RP}^n$. Esprimere $\mathbf{RP}^n$ come quoziente di tali gruppi. Analogamente, verificare che $GL(n + 1, \mathbf{C})$ e $U(n + 1)$ operano transitivamente su $\mathbf{CP}^n$. Esprimere $\mathbf{CP}^n$ come quoziente di tali gruppi.

4. Sia $G(2, 3, \mathbf{R})$ la Grassmanniana dei sottospazi 2-dimensionali in $\mathbf{R}^3$.
   (a) Mostrare che il gruppo $GL(3, \mathbf{R})$ opera transitivamente su $G(2, 3, \mathbf{R})$ e scrivere $G(2, 3, \mathbf{R})$ come quoziente di $GL(3, \mathbf{R})$ per un opportuno sottogruppo.
   (b) Mostrare che anche il gruppo $SO(3)$ opera transitivamente su $G(2, 3, \mathbf{R})$ e scrivere $G(2, 3, \mathbf{R})$ come quoziente di $SO(3)$ per un opportuno sottogruppo.

(sugg.: rappresentare un elemento di $G(2, 3, \mathbf{R})$ con una matrice $X \in M(3, 2, \mathbf{R})$, di rango 2. Quando è che X e Y rappresentano lo stesso sottospazio? Considerare poi l'azione $GL(3, \mathbf{R}) \times G(2, 3, \mathbf{R}) \to G(2, 3, \mathbf{R})$, data da $(M, X) \mapsto MX$).

5. Considerare l'azione di $O(2)$ sullo spazio $S(2, 2, \mathbf{R})$ delle matrici reali simmetriche 2×2 data da
$$g \cdot M := gMg^{-1}, \qquad g \in O(2),\ M \in S(2, 2, \mathbf{R}).$$
   (a) Determinare se l'azione è fedele.
   (b) Determinare le orbite e i sottogruppi di isotropia corrispondenti.

6. Mostrare che $SO(3)$ è diffeomorfo a $\mathbf{R}P^3$.

(sugg.: Considerare l'azione di $SU(2)$ sullo spazio delle matrici anti-hermitiane 2×2, dotato del prodotto scalare $\langle Z, W\rangle = \frac{1}{2}Tr(Z\overline{W}^t)$).

7. Sia $\Theta\colon \Gamma \times M \to M$ un'azione propria senza punti fissi di un gruppo di Lie discreto su una varietà liscia M. Sia $x \in M$. Mostrare che esiste un intorno aperto V di x in M tale che
$$\gamma V \cap V = \emptyset, \qquad \forall \gamma \in \Gamma,\ \gamma \neq id.$$

(sugg.: usare Lee, Prop. 21.5, p.543).

8. (facoltativo) Sia G un gruppo di Lie e sia $\mathcal{X}(G)$ l'algebra di Lie dei campi vettoriali lisci su G. Sia $\mathfrak{g}$ l'insieme dei campi vettoriali su G invarianti a sinistra, ossia tali che

$$X_g = d(L_g)_e X_e,$$

dove $g \in G$ ed $L_g : G \to G$ è la mappa $L_g(x) := gx$. Mostrare che:
(a) $\mathfrak{g}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathcal{X}(G)$;
(b) la mappa $\mathfrak{g} \to T_e G$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.