1. Siano dati i campi vettoriali su $\mathbf{R}^3$

$$X = z\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Y = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$

   (a) Calcolare il flusso Θ di X.
   (b) Calcolare $[X, Y]$.
   (c) Calcolare $\theta_t^* Y$, ossia il campo che in $p \in \mathbf{R}^3$ vale $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)} Y_{\theta_t(p)}$.
   (d) Verificare che $[X, Y] = \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} \theta_t^* Y$.
   (e) Determinare se X e Y generano una distribuzione su $\mathbf{R}^3$.

2. Siano X, Y campi vettoriali lisci e completi su una varietà M. Siano θ_t e ϕ_s i rispettivi gruppi ad un parametro di diffeomorfismi di M. Mostrare che

$$\theta_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \theta_t \quad \Leftrightarrow \quad [X, Y] = 0.$$

   (sugg.: $[U, V] = \mathcal{L}_U V = 0$ se e solo se V è U-invariante).

3. Sia D la distribuzione in $\mathbf{R}^3$ generata da

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1)\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}.$$

   (a) Calcolare $[X, Y]$ e verificare che D è involutiva.
   (b) Verificare che D è generata anche dai campi che commutano

$$V = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \qquad W = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$

   (c) Determinare i flussi di V e W.
   (d) Verificare che le superfici $z - xy = c$, con $c \in \mathbf{R}$, sono varietà integrali di D.

4. Sia D la distribuzione in $\mathbf{R}^3$

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

   (a) Calcolare $[X, Y]$ e verificare che D non è involutiva.
   (b) Calcolare le curve integrali di X e di Y.
   (c) Verificare che se D fosse integrabile, la sottovarietà integrale passante per $(0, 0, 0)$ dovrebbe contenere un intorno aperto di $(0, 0)$ nel piano $z = 0$, e che questo non è possibile.