1. Sia M una varietà differenziabile di dimensione $m > 0$. Mostrare che $\mathcal{X}(M)$ è infinito dimensionale.

2. Sia $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ e siano $E_1 = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y}$ ed $E_2 = -\frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial y}$ campi vettoriali definiti su $\mathbf{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$.
   (a) Mostrare che E_1 ed E_2 sono linearmente indipendenti.
   (b) Mostrare che E_2 è tangente ad S^1 in ogni punto $(x_1, x_2) \in S^1 \subset \mathbf{R}^2$.

3. Siano dati i campi vettoriali di $\mathbf{R}^4$

$$X = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4}, \qquad Y = -x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_4\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial}{\partial x_4},$$

$$Z = -x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4}.$$

   (a) Mostrare che sono tangenti ad $S^3 \subset \mathbf{R}^4$ in ogni punto $(x_1, \ldots, x_4) \in S^3$.
   (b) Mostrare che sono linearmente indipendenti in ogni punto $(x_1, \ldots, x_4) \in S^3$.
   (c) Costruire un campo vettoriale liscio, mai nullo su S^{2n-1}, per $n \geq 1$.

4. Siano X e Y campi vettoriali lisci su una varietà differenziabile M.
   (a) Mostrare che XY non è una derivazione di $C^\infty(M)$: verificare con un controesempio che in generale $X(Y(f \cdot g)) \neq X(Y(f)) \cdot g + f \cdot X(Y(g))$.
   (b) Mostrare che $[X, Y]$ è una derivazione di $C^\infty(M)$: verificare che $[X, Y](f \cdot g) = [X, Y](f) \cdot g + f \cdot [X, Y](g)$, per ogni $f, g \in C^\infty(M)$.
   (c) Mostrare che per ogni X, Y campi vettoriali lisci su una varietà M e funzioni $f, g \in C^\infty(M)$ vale $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

5. Calcolare $[X, Y]$ per ognuna delle seguenti coppie di campi vettoriali su $\mathbf{R}^3$

$$X = y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y};$$

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y};$$

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}.$$

6. Sia $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$ e sia $f\colon M \to M$ data da $f(x, y) = (xy, y/x)$. Mostrare che f è un diffeomorfismo e calcolare f_*X e f_*Y, dove

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = y\frac{\partial}{\partial x}.$$