1. (a) Mostrare che $S^n$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^{n+1}$.
   (b) Mostrare che la mappa $\iota\colon S^n \to S^{n+1}$, definita da $\iota(x) = (x, 0)$, è un embedding.

2. Sia $f\colon M \to N$ un'applicazione differenziabile. Mostrare che $\iota\colon M \to M \times N$, data da $\iota(m) = (m, f(m))$, è un embedding.

3. Sia $f\colon \mathbf{RP}^2 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f([x : y : z]) = (yz, xz, xy)$, dove $[x : y : z]$ è la classe di equivalenza di due punti in $S^3$ rispetto alla mappa antipodale. Mostrare che $f$ è un'immersione tranne che in 6 punti.

4. Sia $f\colon \mathbf{RP}^2 \to \mathbf{R}^4$ definita da $f([x : y : z]) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$, dove $[x : y : z]$ è la classe di equivalenza di due punti in $S^3$ rispetto alla mappa antipodale. Mostrare che $f$ è un embedding di $\mathbf{RP}^2$ in $\mathbf{R}^4$.

5. Sia $f\colon \mathbf{RP}^2 \to \mathbf{R}^6$ definita da $f([x : y : z]) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz)$, dove $[x : y : z]$ è la classe di equivalenza di due punti in $S^3$ rispetto alla mappa antipodale. Mostrare che $f$ è un embedding di $\mathbf{RP}^2$ in $\mathbf{R}^6$ con immagine in $S^5(1)$.

6. Sia $M_c$ il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ definito da
$$M_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-c)\}, \qquad c \in \mathbf{R}.$$
   (a) Per quali valori di $c$ l'insieme $M_c$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^2$?
   (b) Per quali valori di $c$ l'insieme $M_c$ è l'immagine di un'immersione $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, pur non essendo una sottovarietà di $\mathbf{R}^2$?

7. Sia $f\colon SL(2, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, data da $f(A) = tr(A)$.
   (a) Determinare i valori regolari di $f$ (ossia gli $a \in \mathbf{R}$ tali che $df_x$ è suriettivo, per ogni $x \in f^{-1}(a)$).

8. Sia $M$ una varietà differenziabile compatta. Mostrare che $M$ non ammette sommersioni in $\mathbf{R}^n$, con $n > 0$.