1. Siano M una varietà differenziabile, $p \in M$ un punto, e $\gamma\colon I = (-1,1) \to M$ una curva parametrizzata. La velocità di γ in $t_0 \in I$ è definita come

$$\gamma'(t_0) := d\gamma(\frac{d}{dt}|_{t_0}) \in T_{\gamma(t_0)}M.$$

   (a) Determinare l'azione di $\gamma'(t_0)$ su $C^\infty(M)$, quando $M = \mathbf{R}^n$.
   (b) Mostrare che ogni $v \in T_pM$ è la velocità di una curva su M, passante per p.

2.(a) Sia M una varietà differenziabile connessa e sia $f\colon M \to \mathbf{R}$ una funzione con differenziale nullo in ogni punto. Mostrare che f è costante.
   (b) Siano M ed N varietà differenziabili, M connessa, e sia $F\colon M \to N$ una funzione il cui differenziale $dF_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ è la mappa nulla in ogni punto. Mostrare che F è costante.

3. Siano M_1 ed M_2 varietà differenziabili e siano $\pi_i\colon M_1 \times M_2 \to M_i$, per $i = 1, 2$, le due proiezioni. Sia $(p, q) \in M_1 \times M_2$. Mostrare che la mappa

$$\alpha\colon T_{(p,q)}M_1 \times M_2 \to T_pM_1 \oplus T_qM_2, \qquad \alpha(v) := (d(\pi_1)_p(v), d(\pi_2)_q(v)$$

   è un isomorfismo.

4. Sia S^3 la sfera unitaria in $\mathbf{C}^2 \cong \mathbf{R}^4$. Per $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in S^3$, sia $\gamma_\mathbf{z}\colon \mathbf{R} \to S^3$ la curva definita da $\gamma_\mathbf{z}(t) := (e^{it}z_1, e^{it}z_2)$. Mostrare che $\gamma_\mathbf{z}$ è una curva liscia con velocità mai nulla.