1. Sia $F_s\colon B^n \to B^n$, data da $F_s(X) = \frac{X}{\|X\|^{1-s}}$, con $s > 0$.
   (a) Mostrare che F è un omeomorfismo e che è differenziabile se e solo se $s = 1$.
   (b) Mostrare che su una varietà differenziabile M esistono un'infinità non numerabile di strutture differenziabili distinte (sugg.: combinare (a) con l'esistenza di un ricoprimento di M fatto di palle coordinate regolari).

2. Mostrare che la relazione definita sugli atlanti coordinati di una varietà M
   $A_1 \sim A_2$ *se* $A_1 \cup A_2$ *è un atlante di* M
   è una relazione di equivalenza.

3. Mostrare che la mappa $f\colon S^2 \to \mathbf{RP}^2$, data da $f(p) = [p]$ è liscia.

4. Mostrare che le seguenti mappe sono lisce:
   (a) $p_n\colon S^1 \to S^1$, data da $p_n(z) = z^n$, dove $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z|^2 = 1\}$ ed $n \in \mathbf{Z}$.
   (b) $\alpha\colon S^n \to S^n$, data da $\alpha(X) = -X$ (la *mappa antipodale*).
   (c) $F\colon S^3 \to S^2$, data da $F(z, w) = (z\bar{w}+w\bar{z}, iw\bar{z}-iz\bar{w}, z\bar{z}-w\bar{w})$, dove $S^3 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ (la *fibrazione di Hopf*).

5. Sia $P\colon \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ una funzione liscia, omogenea di grado $d \in \mathbf{Z}$, ossia tale che $P(\lambda X) = \lambda^d P(X)$, per ogni $X \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ed ogni $\lambda \in \mathbf{R}^*$. Mostrare che l'applicazione $\widetilde{P}\colon \mathbf{RP}^n \to \mathbf{RP}^n$, data da $\widetilde{P}[X] = [P(X)]$ è ben definita e liscia.

6. Sia M una varietà differenziabile non vuota.Mostrare che lo spazio vettoriale $C^\infty(M)$ è infinito-dimensionale (sugg.: mostrare che se $f_1, \ldots, f_k$ sono funzioni in $C^\infty(M)$, con supporti non vuoti e disgiunti, allora sono linearmente indipendenti).

7. Sia $\mathbf{C}P^1$ lo spazio proiettivo con l'atlante dato dalle carte

   $U_1 = \{[z_1 : z_2] \mid z_1 \neq 0\},\ \phi_1([z_1 : z_2]) = z_2/z_1, \quad U_2 = \{[z_1 : z_2] \mid z_2 \neq 0\},\ \phi_2([z_1 : z_2]) = z_1/z_2;$

   sia $S^2 = \{a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$ la sfera con l'atlante

   $$V_1 = S^2 \backslash \{N\},\ \Psi_1(a, b, c) = (\frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c}), \quad V_2 = S^2 \backslash \{S\},\ \Psi_2(a, b, c) = (\frac{a}{1+c} - i\frac{b}{1+c}),$$

   dove $\mathbf{R}^2$ è stato identificato con $\mathbf{C}$. Mostrare che la mappa $f\colon \mathbf{C}P^1 \to S^2$ definita da $f(\phi_i^{-1}(\zeta)) = \psi_i^{-1}(\zeta)$, per $\zeta \in \mathbf{C}$ e $i = 1, 2$, è un diffeomorfismo.