1. Sia M una varietà n-dimensionale, compatta, orientata e senza bordo.
   (a) Sia $\omega = d\eta$ una n-forma esatta. Mostrare che $\int_M \omega = 0$;
   (b) Mostrare che $H^n_{dR}(M) \neq 0$.

2. Sia M una varietà n-dimensionale, compatta, orientata, con bordo $\partial M \neq \emptyset$. Sia $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ una forma chiusa. Allora $\int_{\partial M} \omega = 0$.

3. Siano M, N varieta' differenziabili, sia $F\colon M \to N$ una mappa liscia, e sia $F^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ l'omomorfismo fra i rispettivi spazi delle k-forme. Mostrare che F^* definisce un omomorfismo fra i gruppi di coomologia di De Rham $F^*\colon H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$.

4. Sia M una varietà n-dimensionale, compatta, orientata e senza bordo. Sia $\Omega^n(M)$ lo spazio delle n-forme su M. Mostrare che l'applicazione lineare $\int_M\colon \Omega^n(M) \to \mathbf{R}$ passa ad un'applicazione lineare
$$\int_M \colon H^n_{dR}(M) \to \mathbf{R}.$$

5. Sia M una varietà differenziabile. Mostrare che il *cup-product*
$$H^p_{dR}(M) \times H^q_{dR}(M) \to H^{p+q}_{dR}(M), \qquad [\omega] \cup [\eta] := [\omega \wedge \eta]$$
è ben definito.

6. Sia M una varietà n-dimensionale, connessa, compatta, orientata e senza bordo. (N.B.: in questo caso, la dualità di Poincaré implica $H^n_{dR}(M) \cong \mathbf{R}$). Siano α e β due n-forme differenziali su M. Mostrare che
$$\int_M \alpha = \int_M \beta$$
se e solo se α e β differiscono per una forma esatta.