1. Mostrare che se un fibrato ammette un riferimento globale, allora è equivalente al fibrato banale. (cf. Abate-Tovena, Oss.3.2.9 e Oss.3.2.10, pag.146).
   (a) Dedurre che il fibrato tangente di S^1 e il fibrato tangente di S^3 sono equivalenti al fibrato banale (cf. esercizi 2 e 3 del foglio 5).

2. (*Prodotto interno o contrazione*). Sia M una varietà di dimensione n, e sia $\mathbf{v}$ un campo vettoriale su M. Sia $\iota_{\mathbf{v}}\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ la mappa definita da

$$\iota_{\mathbf{v}}(\omega)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}) := \omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}).$$

   Se $\eta_1, \ldots, \eta_k$ sono 1-forme ed $\omega = \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k$, allora vale la formula (vedi Arosio, pag.108).

$$\iota_{\mathbf{v}}(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \eta_j(\mathbf{v})\, \eta_1 \wedge \ldots \widehat{\eta}_j \ldots \wedge \eta_k.$$

   (a) Mostrare che $\iota_{\mathbf{v}} \circ \iota_{\mathbf{v}} = 0$.
   (b) Mostrare con un controesempio che $\iota_{\mathbf{v}} \circ d \neq d \circ \iota_{\mathbf{v}}$.
   (c) Calcolare $\iota_{\mathbf{v}}\omega$, per $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ e $\mathbf{v} = -\frac{d}{dx_n}$.

3. Sia $S^n = \{x^2 + \ldots + x^{n+1} = 1\}$ la sfera in $\mathbf{R}^{n+1}$ e sia $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}$.
   (a) Mostrare che $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n+1} x_j \frac{d}{dx_j}$ è un campo trasverso (mai tangente) ad S^n.
   (b) Calcolare la forma forma di volume $\iota_{\mathbf{v}}\omega$ della S^n.
   (c) Per $n = 1$, calcolare il pull-back della forma di volume trovata al punto (b), dove l'inclusione $i\colon S^1 = [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ è data da $i(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ (abbiamo identificato 0 e 2π).
   (d) Per $n = 2$, calcolare il pull-back della forma di volume trovata al punto (b), dove l'inclusione $i\colon S^2 = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbf{R}^3$ è data da $i(\theta, \phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$ (abbiamo identificato 0 e 2π).

4. Mostrare direttamente che S^1 è orientabile.