1. Verificare che l'unione disgiunta di un'infinità non numerabile di copie di $\mathbf{R}$ è localmente euclideo e di Hausdorff, ma non è a base numerabile.

2. *La retta con due origini.* Sia $\overline{X}$ il quoziente topologico di $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \pm 1\}$ rispetto alla relazione di equivalenza $(x, 1) \sim (x, -1)$, per $x \neq 0$. Verificare che $\overline{X}$ è localmente euclideo, a base numerabile, ma non è di Hausdorff.

3. Sia $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Verificare che la funzione $f: S^1 \to \mathbf{R}$, data da $f(x, y) = x - y$, è liscia.

4. Sia M una varietà differenziabile e sia (U, ϕ) una carta coordinata su M. Verificare che $\phi: U \to \phi(U)$ è un diffeomorfismo.

5. Mostrare che il prodotto cartesiano di due varietà differenziabili (senza bordo) è una varietà differenziabile.

6. Mostrare che $\mathbf{CP}^n$ è una varietà complessa.

7. Mostrare che $U(n) = \{A \mid {}^t\bar{A}A = I_n)$ è una sottovarietà compatta di $M(n, n, \mathbf{C})$ di dimensione reale n^2, ed $SU(n) = \{A \in U(n) \mid det(A) = 1\}$ una sottovarietà compatta di $M(n, n, \mathbf{C})$ di dimensione reale $n^2 - 1$.

8. Sia $F: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, data da $F(x, y, z, w) = (x^2 + y, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + y)$. Mostrare che $(0, 1) \in \mathbf{R}^2$ è un valore regolare di F e che $F^{-1}(0, 1)$ è diffeomorfo a S^2.

9. Sia $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, data da $F(x, y) = x^3 + xy + y^3$. Determinare per quali valori di $a \in \mathbf{R}$, la curva di livello $F^{-1}(a)$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^2$.

10. Sia $M_c = \{((x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-c)\}$. Determinare per quali valori di $c \in \mathbf{R}$, l'insieme M_c è una varietà.