1. Sia $F\colon M \to N$ una mappa liscia fra varietà differenziabili. Verificare che il pull-back $F^*\omega$ di una forma differenziale $\omega \in \Omega(N)$ è liscia. (cf. Lee, Prop.12.19 e Exerc.12.21, pag.317-318).

2. Siano ω la forma su $\mathbf{R}^3$ data da $\omega = zdx\wedge dy + xydx\wedge dz$ e la funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ data da $f(u,v) = (u^2, u, uv)$. Calcolando separatamente i termini delle due uguaglianze, verificare che
   (a) $d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega)$;
   (b) $d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$, dove $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ è data da $f(x,y,z) = xy$.

3. Sia M una varietà differenziabile. Siano A un chiuso, $U \subset M$ un aperto contenente A ed ω una forma differenziale su A. Mostrare che esiste una forma differenziale $\tilde{\omega}$ su M, con supporto in U e che coincide con ω su A (applicazione delle partizioni dell'unità).

4. (a) Sia ω la 1-forma su $\mathbf{R}^2$ data da $\omega = -ydx + xdy$ e sia $\iota\colon S^1 \to \mathbf{R}^2$, $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, l'iclusione. Mostrare che $\iota^*_{S^1}\omega$, il pull-back di ω sulla circonferenza S^1, è una forma di volume su S^1 (ossia non si annulla mai). Calcolare il "volume" di S^1.

   (b) Sia ω la 2-forma su $\mathbf{R}^3$ data da $\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$. Sia $\iota\colon S^2 \to \mathbf{R}^3$, $(\theta, \phi) \mapsto (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$, con $\phi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, l'inclusione. Verificare che $\iota^*_{S^2}\omega$, il pull-back di ω sulla sfera unitaria S^2 (dove le coordinate sferiche sono definite), è una forma di volume su S^2 (ossia non si annulla mai). Calcolare il "volume" di S^2.

5. Sia data la 3-forma

$$\omega = x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

   in $\mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$. Sia $A\colon \mathbf{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$ la mappa antipodale. Verificare che $A^*\omega = \omega$.