

1. Sia $V = \mathbf{R}^3$ con la base canonica e_1, e_2, e_3 e sia $f = \eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \eta_3 \in T^3(V^*)$, dove η_1, η_2, η_3 denota la base duale di V^* . Verificare che $f \neq \text{Sym}(f) + \text{Alt}(f)$.
2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n , e siano $f \in \Lambda^2(V^*)$ e $g \in \Lambda^1(V^*)$. Calcolare $f \wedge g$.
3. Siano $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3$ ed $\eta = \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2 + \eta_3 dx_3$ due 1-forme in \mathbf{R}^3 . Verificare che le componenti della 2-forma $\omega \wedge \eta$ coincidono con le componenti del prodotto vettoriale $X_\omega \times Y_\eta$, dove $X_\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ed $Y_\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$.
4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n , e siano $f_1, \dots, f_k \in \Lambda^1(V^*)$. Mostrare che $f_1 \wedge \dots \wedge f_k(v_1, \dots, v_k) = \det(f_i(v_j))$.
5. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\eta_1, \dots, \eta_k \in \Lambda^1(V^*)$. Mostrare che η_1, \dots, η_k sono linearmente indipendenti se e solo se $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \neq 0$.
6. (*Forme decomponibili*). Una k -forma $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ si dice *decomponibile* se si può scrivere come prodotto di 1-forme, ossia $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$, con $\omega_i \in \Lambda^1(V^*)$.
 - (a) Se $\dim V = n$, allora tutte le forme $\omega \in \Lambda^1(V^*)$ ed $\eta \in \Lambda^n(V^*)$ sono decomponibili.
 - (b) Mostrare che tutte le forme $\chi \in \Lambda^{n-1}(V^*)$ sono decomponibili.
7. (*Proprietà universale del prodotto esterno*). La mappa

$$\pi : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ volte}} \rightarrow \Lambda^k(V), \text{ definita da } \pi(v_1, \dots, v_k) := v_1 \wedge \dots \wedge v_k,$$

è k -multilineare alternante. Mostrare che è *universale*, cioè se $A: V \times \dots \times V \rightarrow W$ è un'applicazione k -multilineare alternante, allora esiste un'unica applicazione lineare $\tilde{A}: \Lambda^k(V) \rightarrow W$ tale che $A = \tilde{A} \circ \pi$.