Nei primi tre esercizi è già istruttivo verificare i dettagli per $n = 2$ ed $n = 3$...)

1. Considerare l'azione standard di $SO(n)$ su $\mathbf{R}^n$.
   (a) Verificare che l'azione e' fedele (non ci sono elementi non banali del gruppo che agiscono come l'identità).
   (b) Determinare le orbite e i sottogruppi di isotropia corrispondenti.
   (c) Verificare che lo spazio delle orbite è di Hausdorff.
   (d) Estendere le stesse considerazioni al caso dell'azione standard di $U(n)$ su $\mathbf{C}^n$.

2. Considerare l'azione standard di $GL(n, \mathbf{R})$ (risp. $SL(n, \mathbf{R})$) su $\mathbf{R}^n$.
   (a) Verificare che l'azione è fedele.
   (b) Determinare le orbite e i sottogruppi di isotropia corrispondenti.
   (c) Verificare che lo spazio delle orbite non è di Hausdorff.
   (d) Estendere le stesse considerazioni al caso dell'azione standard di $GL(n, \mathbf{C})$ su $\mathbf{C}^n$.

3. Verificare che $GL(n+1, \mathbf{R})$ e $SO(n+1)$ operano transitivamente su $\mathbf{RP}^n$. Esprimere $\mathbf{RP}^n$ come quoziente di tali gruppi. Analogamente, verificare che $GL(n+1, \mathbf{C})$ e $U(n+1)$ operano transitivamente su $\mathbf{CP}^n$. Esprimere $\mathbf{CP}^n$ come quoziente di tali gruppi.

4. Sia $G(2, 3, \mathbf{R})$ la Grassmanniana dei sottospazi 2-dimensionali in $\mathbf{R}^3$.
   (a) Mostrare che il gruppo $GL(3, \mathbf{R})$ opera transitivamente su $G(2, 3, \mathbf{R})$. (sugg. rappresentare un elemento di $G(2, 3, \mathbf{R})$ con una matrice $X \in M(3, 2, \mathbf{R})$, di rango 2. Quando è che X e Y rappresentano lo stesso sottospazio? Considerare poi l'azione $GL(3, \mathbf{R}) \times G(2, 3, \mathbf{R}) \to G(2, 3, \mathbf{R})$, data da $(M, X) \mapsto MX$).
   (b) Mostrare che lo stesso vale per il gruppo $SO(3)$.
   (c) Scrivere $G(2, 3, \mathbf{R})$ come quoziente di tali gruppi.

5. Considerare l'azione di $O(2)$ sullo spazio $S(2, 2, \mathbf{R})$ delle matrici reali simmetriche 2×2 data da
   $$g \cdot M := gMg^{-1}, \qquad g \in O(2),\ M \in S(2, 2, \mathbf{R}).$$
   (a) Determinare se l'azione è fedele.
   (b) Determinare le orbite e i sottogruppi di isotropia corrispondenti.

6. Sia $\theta\colon G \times M \to M$ una azione differenziabile di un gruppo di Lie compatto G su una varietà liscia M. Mostrare che l'azione è necessariamente propria.