

1. Sia  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione data da  $f(x, y, z) = x^3 - y^3 + xyz - xy$ .
  - (a) Mostrare che  $S = \{f = 0\}$  è una sottovarietà di  $\mathbf{R}^3$ , in un intorno di  $p = (1, 1, 1)$ .
  - (b) Determinare lo spazio tangente  $T_p S$  ad  $S$  in  $p$ .
  
2. Sia  $f: M \rightarrow N$  un diffeomorfismo e sia  $X \in \mathcal{X}(M)$ .
  - (a) Derivare una formula per  $f_* X$  come derivazione di  $C^\infty(N)$ .
  - (a) Derivare una formula per il flusso di  $f_* X$ .
  
3. Calcolare il flusso de seguenti campi vettoriali su  $\mathbf{R}^2$   
 (vedi Esempi di campi vettoriali 1 , 2 , 3 , 4 , 5, dalla pagina principale)
  - (a)  $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ ;
  - (b)  $X = x \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ ;
  - (c)  $X = -x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ ;
  - (d)  $X = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ ;
  - (e)  $X = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ .
  
4. Calcolare il flusso dei seguenti campi vettoriali:
  - (a)  $Z = (4x - 3y) \frac{\partial}{\partial x} + (6x - 5y) \frac{\partial}{\partial y}$  su  $\mathbf{R}^2$ ;
  - (b)  $Z = (1 + x^2) \frac{\partial}{\partial x}$  su  $\mathbf{R}$ ;
  
5. Sia  $\phi: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ ,  $\phi(t, x) = \phi_t(x)$  un'azione liscia di  $\mathbf{R}$  su una varietà  $M$  ( $\phi_t$  è un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi di  $M$ , ossia soddisfa  $\phi_s \circ \phi_t(x) = \phi_{s+t}(x)$ , per ogni  $s, t \in \mathbf{R}$  ed  $x \in M$ ). Mostrare che

$$X(p) := \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\phi_t(p))$$

definisce un campo vettoriale liscio il cui flusso è  $\phi$ .

6. Sia  $D$  la distribuzione in  $\mathbf{R}^3$  generata da

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1) \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}.$$

- (a) Calcolare  $[X, Y]$  e verificare che  $D$  è involutiva.
- (b) Verificare che  $D$  è generata anche dai campi che commutano

$$V = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}.$$

- (c) Determinare i flussi di  $V$  e  $W$ .
- (d) Verificare che le superfici  $z - xy = c$ , con  $c \in \mathbf{R}$ , sono varietà integrali di  $D$ .

7. Sia  $D$  la distribuzione in  $\mathbf{R}^3$

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

- (a) Calcolare  $[X, Y]$  e verificare che  $D$  non è involutiva.
- (b) Calcolare le curve integrali di  $X$  e di  $Y$ .
- (c) Verificare che se  $D$  fosse integrabile, la sottovarietà integrale passante per  $(0, 0, 0)$  dovrebbe contenere un intorno aperto  $(0, 0)$  del piano  $z = 0$ , e che questo non è possibile.