

1. Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m > 0$ . Mostrare che  $\mathcal{X}(M)$  è infinito dimensionale.
2. Sia  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$  e siano  $E_1 = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial y}$  ed  $E_2 = -\frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial y}$  campi vettoriali definiti su  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Mostrare che  $E_1$  ed  $E_2$  sono linearmente indipendenti.
3. Siano dati i campi vettoriali di  $\mathbf{R}^4$

$$X = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad Y = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4},$$

$$Z = -x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

- (a) Mostrare che sono tangenti ad  $S^3$  in ogni punto  $(x_1, \dots, x_4) \in S^3$ .
  - (b) Mostrare che sono linearmente indipendenti in ogni punto  $(x_1, \dots, x_4) \in S^3$ .
  - (c) Costruire un campo vettoriale liscio, mai nullo su  $S^{2n-1}$ , per  $n \geq 1$ .
4. Siano  $X$  e  $Y$  campi vettoriali lisci su una varietà differenziabile  $M$ .
    - (a) Mostrare che  $XY$  non è una derivazione di  $C^\infty(M)$ : verificare con un controesempio che in generale  $X(Y(f \cdot g)) \neq X(Y(f)) \cdot g + f \cdot X(Y(g))$ .
    - (b) Mostrare che  $[X, Y]$  è una derivazione di  $C^\infty(M)$ : verificare che  $[X, Y](f \cdot g) = [X, Y](f) \cdot g + f \cdot [X, Y](g)$ , per ogni  $f, g \in C^\infty(M)$ .
    - (c) Mostrare che per ogni  $X, Y$  campi vettoriali lisci su una varietà  $M$  e funzioni  $f, g \in C^\infty(M)$  vale  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .
  5. Calcolare  $[X, Y]$  per ognuna delle seguenti coppie di campi vettoriali su  $\mathbf{R}^3$

$$X = y \frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2 \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y};$$

$$X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y};$$

$$X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}.$$