

1. (a) Mostrare che S^n è una sottovarietà di \mathbf{R}^{n+1} .
 (b) Mostrare che la mappa $\iota: S^n \rightarrow S^{n+1}$, definita da $\iota(x) = (x, 0)$, è un embedding.
2. Sia $f: M \rightarrow N$ un'applicazione differenziabile. Mostrare che $\iota: M \rightarrow M \times N$, data da $\iota(m) = (m, f(m))$, è un embedding.
3. Sia $f: \mathbf{RP}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $f([x : y : z]) = (yz, xz, xy)$, dove $[x : y : z]$ è la classe di equivalenza di due punti in S^3 rispetto alla mappa antipodale. Mostrare che f è un'immersione tranne che in 6 punti.
4. Sia $f: \mathbf{RP}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ definita da $f([x : y : z]) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$, dove $[x : y : z]$ è la classe di equivalenza di due punti in S^3 rispetto alla mappa antipodale. Mostrare che f è un embedding di \mathbf{RP}^2 in \mathbf{R}^4 .
5. Sia $f: \mathbf{RP}^2 \rightarrow \mathbf{R}^6$ definita da $f([x : y : z]) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz)$, dove $[x : y : z]$ è la classe di equivalenza di due punti in S^3 rispetto alla mappa antipodale. Mostrare che f è un embedding di \mathbf{RP}^2 in \mathbf{R}^6 con immagine in $S^5(1)$.
6. Sia M_λ il sottoinsieme di \mathbf{R}^2 definito da

$$M_\lambda = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

- (a) Per quali valori di λ l'insieme M_λ è una sottovarietà chiusa di \mathbf{R}^2 ?
 - (b) Per quali valori di λ l'insieme M_λ è l'immagine di un'immersione $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, pur non essendo una sottovarietà chiusa di \mathbf{R}^2 ?
7. Sia M una varietà differenziabile compatta. Mostrare che M non ammette sommersioni in \mathbf{R}^n , con $n > 0$.