1. Siano M una varietà differenziabile, $p \in M$ un punto, e $\gamma\colon I = (-1,1) \to M$ una curva parametrizzata. La velocità di γ in $t_0 \in I$ è definita come

$$\gamma'(t_0) := d\gamma(\frac{d}{dt}|_{t_0}) \in T_{\gamma(t_0)}M.$$

   (a) Determinare l'azione di $\gamma'(t_0)$ su $C^\infty(M)$, quando $M = \mathbf{R}^n$.
   (b) Mostrare che ogni $v \in T_pM$ è la velocità di una curva su M, passante per p.

2. Sia M una varietà differenziabile connessa e sia $f\colon M \to \mathbf{R}$ una funzione con differenziale nullo in ogni punto. Mostrare che f è costante.

3. Sia S^3 la sfera unitaria in $\mathbf{C}^2 \cong \mathbf{R}^4$. Per $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in S^3$, sia $\gamma_{\mathbf{z}}\colon \mathbf{R} \to S^3$ la curva definita da $\gamma_{\mathbf{z}}(t) := (e^{it}z_1, e^{it}z_2)$. Mostrare che $\gamma_{\mathbf{z}}$ è una curva liscia con velocità mai nulla.

4. Sia $\mathbf{C}P^1$ lo spazio proiettivo con l'atlante dato dalle carte

$$U_1 = \{[z_1 : z_2] \mid z_1 \neq 0\},\ \phi_1([z_1 : z_2]) = z_2/z_1, \quad U_2 = \{[z_1 : z_2] \mid z_2 \neq 0\},\ \phi_2([z_1 : z_2]) = z_1/z_2;$$

sia $S^2 = \{a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$ la sfera con l'atlante

$$V_1 = S^2 \backslash \{N\},\ \Psi_1(a,b,c) = (\frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c}), \quad V_2 = S^2 \backslash \{S\},\ \Psi_2(a,b,c) = (\frac{a}{1+c} - i\frac{b}{1+c}),$$

dove $\mathbf{R}^2$ è stato identificato con $\mathbf{C}$. Mostrare che la mappa $f\colon \mathbf{C}P^1 \to S^2$ definita da $f(\phi_i^{-1}(\zeta)) = \psi_i^{-1}(\zeta)$, per $\zeta \in \mathbf{C}$ e $i = 1, 2$, è un diffeomorfismo.