1. Sia $f\colon SL(2,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, data da $f(A) = tr(A)$.
   (a) Determinare i valori regolari di f (ossia gli $a \in \mathbf{R}$ tali che df_x è suriettivo, per ogni $x \in f^{-1}(a)$).
   (b) Che tipo di superficie è $f^{-1}(a)$, se a è un valore regolare?
   (c) Che tipo di superficie è $f^{-1}(a)$, se a non è un valore regolare?

2. Sia H il gruppo di Heisenberg

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \mathbf{R}.$$

   (a) Mostrare che H è un gruppo di Lie diffeomorfo a $\mathbf{R}^3$. Scrivere la moltiplicazione corrispondente su $\mathbf{R}^3$.
   (b) Determinare i campi invarianti a sinistra X, Y, Z su $\mathbf{R}^3$ il cui valore nell'identità è la base standard di $\mathbf{R}^3$.
   (c) Calcolare $[X, Y]$, $[X, Z]$, $[Y, Z]$ come campi invarianti a sinistra su $\mathbf{R}^3$.

3. Sia $G = SU(2) = \{g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\}$. L'algebra di Lie di G è data da

$$\mathfrak{g} = \{X = \begin{pmatrix} i\alpha & u + iv \\ -u + iv & -i\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, u, v \in \mathbf{R}\}.$$

   (a) Verificare che $\langle X, Y\rangle := -\frac{1}{2} traccia(XY)$ definisce un prodotto scalare su $\mathfrak{g}$.

   Considerare l'azione di G su $\mathfrak{g}$ data da

$$\theta\colon G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (g, X) \mapsto gXg^{-1}$$

   (b) Verificare che è ben definita su $\mathfrak{g}$, conserva il prodotto scalare $\langle X, Y\rangle$ e che il nucleo dell'azione (i.e. gli elementi di G che fissano $\mathfrak{g}$) sono $\{\pm I_2\}$.
   (c) Dedurre che $SO(3)$ è diffeomorfo a $\mathbf{RP}^3$.

4. Dimostrare il *Lemma dei tempi uniformi* (Vedi Lee, Lemma 9.15, pag.216). Dedurne che su una varietà compatta ogni campo vettoriale è completo.