1. Mostrare che se un fibrato ammette un riferimento globale, allora è equivalente al fibrato banale.
   (a) Dedurre che il fibrato tangente di S^1 e il fibrato tangente di S^3 sono equivalenti al fibrato banale (cf. esercizi 2 e 3 del foglio 5) .

2. (*Prodotto interno o contrazione*). Sia M una varietà di dimensione n, e sia $\mathbf{v}$ un campo vettoriale su M. Sia $\iota_{\mathbf{v}}\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ la mappa definita da

$$\iota_{\mathbf{v}}(\omega)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) := \omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}).$$

   (a) Mostrare che $\iota_{\mathbf{v}} \circ \iota_{\mathbf{v}} = 0$.
   Usando la formula

$$\iota_{\mathbf{v}}(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \eta_j(\mathbf{v})\, \eta_1 \wedge \ldots \widehat{\eta}_j \ldots \wedge \eta_k, \quad \text{(le } \eta_j \text{ sono 1-forme)},$$

   (b) calcolare $\iota_{\mathbf{v}}\omega$, per $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ e $\mathbf{v} = -\frac{d}{dx_n}$.

3. Sia $S^n = \{x^2 + \ldots + x^{n+1} = 1\}$ la sfera in $\mathbf{R}^{n+1}$ e sia $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}$.
   (a) Mostrare che $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n+1} x_j \frac{d}{dx_j}$ è un campo trasverso (mai tangente) ad S^n.
   (b) Calcolare $\iota_{\mathbf{v}}\omega$ e, per $n = 1, 2, 3$, confrontarla con le forme degli esercizi 4 e 5 del foglio 9.

4. Mostrare direttamente che S^1 è orientabile.