1. Verificare che l'unione disgiunta di un'infinità non numerabile di copie di $\mathbf{R}$ è localmente euclideo e di Hausdorff, ma non è a base numerabile.

2. *La retta con due origini.* Sia $\overline{X}$ il quoziente topologico di $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \pm 1\}$ rispetto alla relazione di equivalenza $(x,1) \sim (x,-1)$, per $x \neq 0$. Verificare che $\overline{X}$ è localmente euclideo, a base numerabile, ma non è di Hausdorff.

3. Mostrare che la relazione definita sugli atlanti coordinati di una varietà M
$$A_1 \sim A_2 \ \textit{se}\ A_1 \cup A_2 \ \textit{è un atlante di}\ M$$
è una relazione di equivalenza.

4. Mostrare che il prodotto cartesiano di due varietà differenziabili (senza bordo) è una varietà differenziabile.

5. Mostrare che $\mathbf{CP}^n$ è una varietà complessa.

6. Mostrare che $U(n) = \{A \mid {}^t\bar{A}A = I_n)$ è una sottovarietà compatta di $M(n,n,\mathbf{C})$ di dimensione reale n^2, ed $SU(n) = \{A \in U(n) \mid det(A) = 1\}$ una sottovarietà compatta di $M(n,n,\mathbf{C})$ di dimensione reale n^2-1.

7. Sia $F\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, data da $F(x,y,z,w) = (x^2+y, x^2+y^2+z^2+w^2+y)$. Mostrare che $(0,1) \in \mathbf{R}^2$ è un valore regolare di F e che $F^{-1}(0,1)$ è diffeomorfo a S^2.

8. Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, data da $F(x,y) = x^3 + xy + y^3$. Determinare per quali valori di $a \in \mathbf{R}$, la curva di livello $F^{-1}(a)$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^2$.

9. Sia $S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$. Determinare se la funzione $f\colon S^1 \to \mathbf{R}$, data da $f(x,y) = y$ è liscia.