1. Considerare i campi vettoriali in $\mathbf{R}^3 \setminus \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \}$

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z}.$$

   (a) Calcolare $[X, Y]$.
   (b) Verificare che il flusso di $X$ è dato da

$$\theta_t(p) = (t+p_1, p_2, p_3 - \arctan(\frac{t+p_1}{p_2}) + \arctan(\frac{p_1}{p_2}), \quad t \in \mathbf{R},\ p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{R}^3,\ p_2 \neq 0$$

   e che il flusso di $Y$ è dato da

$$\eta_s(p) = (p_1, p_2+s, p_3 + \arctan(\frac{s+p_2}{p_1}) - \arctan(\frac{p_2}{p_1}), \quad s \in \mathbf{R},\ p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{R}^3,\ p_1 \neq 0;$$

   (c) Verificare che esistono $t,\ s,\ p$ per i quali $\eta_s\theta_t \neq \theta_t\eta_s$. Confrontare questo risultato con le ipotesi della Prop. 3.7.3, Abate-Tovena, pag.172 e Lee, pag.233 in alto.

2. Sia $D$ la distribuzione in $\mathbf{R}^3$

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

   (a) Calcolare $[X, Y]$ e verificare che $D$ non è involutiva.
   (b) Calcolare le curve integrali di $X$ e di $Y$.
   (c) Verificare che se $D$ fosse integrabile, la sottovarietà integrale passante per $(0, 0)$ dovrebbe contenere un intorno aperto $(0, 0)$, e che questo non è possibile.

3. Sia $D$ la distribuzione in $\mathbf{R}^3$ generata da

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1)\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}.$$

   (a) Calcolare $[X, Y]$ e verificare che $D$ è involutiva.
   (b) Verificare che $D$ è generata anche dai campi che commutano

$$V = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \qquad W = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$

   (c) Determinare i flussi di $V$ e $W$.
   (d) Verificare che le superfici $z - xy = c$, con $c \in \mathbf{R}$, sono varietà integrali di $D$.