1. Sia M una varietà differenziabile e sia $X \in \mathcal{X}(M)$. Mostrare che $X(p) = 0$ se e solo se $\theta_t(p) = p$, per ogni t.

2. Calcolare il flusso dei seguenti campi vettoriali:
   (a) $Z(x, y) = (4x - 3y)\frac{\partial}{\partial x} + (6x - 5y)\frac{\partial}{\partial y}$ su $\mathbf{R}^2$;
   (b) $Z(x) = (1 + x^2)\frac{\partial}{\partial x}$ su $\mathbf{R}$;

3. Sia $\phi_t : M \to M$ un gruppo ad un parametro, ossia una mappa liscia
$$\phi : \mathbf{R} \times M \to M, \quad \phi(t, x) = \phi_t(x)$$
che soddisfa $\phi_s \circ \phi_t(x) = \phi_{s+t}(x)$, per ogni $s, t \in \mathbf{R}$ ed $x \in M$. Mostrare che
$$X(p) := \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(\phi_t(p))$$
definisce un campo vettoriale liscio il cui flusso è ϕ.

4. Sia $f : M \to N$ un diffeomorfismo e sia $X \in \mathcal{X}(M)$.
   (a) Derivare una formula per f_*X come derivazione di $C^\infty(N)$.
   (a) Derivare una formula per il flusso di f_*X.

5. Sia H il gruppo di Heisenberg
$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \mathbf{R}.$$
   (a) Mostrare che H è un gruppo di Lie diffeomorfo a $\mathbf{R}^3$. Scrivere la moltiplicazione corrispondente su $\mathbf{R}^3$.
   (b) Determinare i campi invarianti a sinistra X, Y, Z su $\mathbf{R}^3$ il cui valore nell'identità è la base standard di $\mathbf{R}^3$.
   (c) Calcolare $[X, Y]$, $[X, Z]$, $[Y, Z]$ come campi invarianti a sinistra su $\mathbf{R}^3$.

6. Sia $G = SU(2) = \{g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\}$. L'algebra di Lie di G è data da
$$\mathfrak{g} = \{X = \begin{pmatrix} i\alpha & u + iv \\ -u + iv & -i\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, u, v \in \mathbf{R}\}.$$
   (a) Verificare che $\langle X, Y \rangle := -\frac{1}{2} traccia(XY)$ definisce un prodotto scalare su $\mathfrak{g}$.
   Consideriamo l'azione di G su $\mathfrak{g}$ data da
$$\theta : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (g, X) \mapsto gXg^{-1}$$
   (b) Verificare che è ben definita su $\mathfrak{g}$, conserva il prodotto scalare $\langle X, Y \rangle$ e che il nucleo dell'azione (i.e. gli elementi di G che fissano $\mathfrak{g}$) sono $\{\pm I_2\}$.
   (c) Dedurre che $SO(3)$ è diffeomorfo a $\mathbf{RP}^3$.