1. Sia M una varietà differenziabile di dimensione $m > 0$. Mostrare che $\mathcal{X}(M)$ è infinito dimensionale.

2. Sia V il campo vettoriale di Eulero dato da $V = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ e sia $c \in \mathbf{R}$. Sia $f\colon \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ una funzione liscia che soddisfa $f(\lambda x) = \lambda^c f(x)$, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$. Mostrare che $V(f) = cf$.

3. Siano X e Y campi vettoriali lisci su una varietà differenziabile M.
   (a) Mostrare che XY non è una derivazione di $C^\infty(M)$: verificare con un controesempio che in generale $X(Y(f \cdot g)) \neq X(Y(f)) \cdot g + f \cdot X(Y(g))$.
   (b) Mostrare che $[X, Y]$ è una derivazione di $C^\infty(M)$: verificare che $[X, Y](f \cdot g) = [X, Y](f) \cdot g + f \cdot [X, Y](g)$, per ogni $f, g \in C^\infty(M)$.

4. Calcolare $[X, Y]$ per ognuna delle seguenti coppie di campio vettoriali su $\mathbf{R}^3$

$$X = y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y};$$

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y};$$

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}.$$

5. Dimostrare la Prop. 8.30 di Lee, pag. 188 e dedurre il Corollario 8.31.

6. Sia $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$ e sia $f\colon M \to M$ data da $f(x, y) = (xy, y/x)$. Mostrare che f è un diffeomorfismo e calcolare f_*X e f_*Y, dove

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = y\frac{\partial}{\partial x}.$$