I primi due esercizi sono esempi citati in classe. Ad ogni modo e' istruttivo verificare i dettagli, almeno per $n = 2$ o $n = 3$...

1. Considerare l'azione standard di $SO(n)$ su $\mathbf{R}^n$.
   (a) Verificare che l'azione e' fedele.
   (b) Determinare le orbite e i sottogruppi di isotropia corrispondenti.
   (c) Verificare che lo spazio delle orbite è di Hausdorff.
   (d) Estendere le stesse considerazioni al caso dell'azione standard di $U(n)$ su $\mathbf{C}^n$.

2. Considerare l'azione standard di $GL(n, \mathbf{R})$ (risp. $SL(n, \mathbf{R})$) su $\mathbf{R}^n$.
   (a) Verificare che l'azione è fedele.
   (b) Determinare le orbite e i sottogruppi di isotropia corrispondenti.
   (c) Verificare che lo spazio delle orbite non è di Hausdorff.
   (d) Estendere le stesse considerazioni al caso dell'azione standard di $GL(n, \mathbf{C})$ su $\mathbf{C}^n$.

3. Verificare che $GL(n+1, \mathbf{R})$ e $SO(n+1)$ operano transitivamente su $\mathbf{RP}^n$. Esprimere $\mathbf{RP}^n$ come quoziente di tali gruppi. Analogamente, verificare che $GL(n + 1, \mathbf{C})$ e $U(n + 1)$ operano transitivamente su $\mathbf{CP}^n$.

4. Considerare l'azione di $O(2)$ sullo spazio $S(2, 2, \mathbf{R})$ delle matrici reali simmetriche 2×2 data da
$$g \cdot M := gMg^{-1}, \qquad g \in O(2),\ M \in S(2, 2, \mathbf{R}).$$
   (a) Determinare se l'azione è fedele.
   (b) Determinare le orbite e i sottogruppi di isotropia corrispondenti.

5. Sia G un gruppo di Lie che opera in modo continuo su una varieta'. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) l'azione è propria;
   (b) siano $\{p_i\}$ una successione in M e $\{g_i\}$ una successione in G tali che $p_i \to p$ e $g_i p_i \to q$ in M, allora una sottosuccessione di $\{g_i\}$ converge in G.
   (c) Per ogni sottoinsieme compatto $K \subset M$, l'insieme $G_K = \{g \in G \mid (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$ è compatto.

6. Sia $\theta \colon G \times M \to M$ una azione differenziabile di un gruppo di Lie compatto G su una varietà liscia M. Mostrare che l'azione è necessariamente propria.

7. Sia $\theta \colon G \times M \to M$ una azione differenziabile propria di un gruppo di Lie G su una varietà liscia M. Mostrare che le G-orbite sono chiuse e i sottogruppi di isotropia compatti.