1. Siano X e Y spazi topologici e sia $F\colon X \to Y$ una mappa continua, che inoltre è aperta o chiusa. Se è iniettiva, allora è un embedding topologico, ossia è un omeomorfismo con l'immagine.

2. Sia $f\colon \mathbf{RP}^2 \to \mathbf{R}^4$ definita da $f([x:y:z]) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$, dove $[x:y:z]$ è la classe di equivalenza di due punti in S^3 rispetto alla mappa antipodale. Mostrare che f è un embedding di $\mathbf{RP}^2$ in $\mathbf{R}^4$.

3. Sia $f\colon \mathbf{RP}^2 \to \mathbf{R}^6$ definita da $f([x:y:z]) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz)$, dove $[x:y:z]$ è la classe di equivalenza di due punti in S^3 rispetto alla mappa antipodale.
   (a) Mostrare che f è un embedding di $\mathbf{RP}^2$ in $\mathbf{R}^6$ con immagine in $S^5(1)$.
   (b) Se $V^5 = \{(y_1, \dots, y_6) \in \mathbf{R}^6 \mid y_1 + y_2 + y_3 = 1\}$, mostrare che $f(\mathbf{RP}^2) \subset V^5$ ed $f(\mathbf{RP}^2) \subset V^5 \cap S^5(1) = S^4(\sqrt{2/3})$. Dunque f è un embedding in una 4-sfera di raggio $\sqrt{2/3}$ che, via la proiezione strereografica, induce un embedding in $\mathbf{R}^4$ (qui $S^n(r)$ indica la sfera di centro 0 e raggio r in $\mathbf{R}^{n+1}$).

4. Sia $f\colon SL(2,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, data da $f(A) = tr(A)$.
   (a) Determinare i valori regolari di f (ossia gli $a \in \mathbf{R}$ tali che df_x è suriettivo, per ogni $x \in f^{-1}(a)$).
   (b) Che tipo di superficie è $f^{-1}(a)$, se a è un valore regolare?
   (c) Che tipo di superficie è $f^{-1}(a)$, se a non è un valore regolare?

5. Sia M_λ il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ definito da

$$M_\lambda = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\}, \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

   (a) Per quali valori di λ l'insieme M_λ è una sottovarietà chiusa di $\mathbf{R}^2$?
   (b) Per quali valori di λ l'insieme M_λ è l'immagine di un'immersione$F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, pur non essendo una sottovarietà chiusa di $\mathbf{R}^2$?

6. Sia M una varietà differenziabile compatta. Mostrare che M non ammette sommersioni in $\mathbf{R}^n$, con $n > 0$.