

1. Sia $F_s: B^n \rightarrow B^n$, data da $F_s(X) = \frac{X}{\|X\|^{1-s}}$, con $s > 0$.
 - (a) Mostrare che F è un omeomorfismo e che è differenziabile se e solo se $s = 1$.
 - (b) Mostrare che su una varietà differenziabile M esistono un'infinità non numerabile di strutture differenziabili distinte (sugg.: combinare (a) con l'esistenza di un ricoprimento di M fatto di palle coordinate regolari).

2. Mostrare che la mappa $f: S^2 \rightarrow \mathbf{RP}^2$, data da $f(p) = [p]$ è liscia.

3. Mostrare che le seguenti mappe sono lisce:
 - (a) $p_n: S^1 \rightarrow S^1$, data da $p_n(z) = z^n$, dove $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z|^2 = 1\}$ ed $n \in \mathbf{Z}$.
 - (b) $\alpha: S^n \rightarrow S^n$, data da $\alpha(X) = -X$ (la *mappa antipodale*).
 - (c) $F: S^3 \rightarrow S^2$, data da $F(z, w) = (z\bar{w} + w\bar{z}, iw\bar{z} - iz\bar{w}, z\bar{z} - w\bar{w})$, dove $S^3 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ (la *fibrazione di Hopf*).

4. Sia $P: \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ una funzione liscia, omogenea di grado $d \in \mathbf{Z}$, ossia tale che $P(\lambda X) = \lambda^d P(X)$, per ogni $X \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ed ogni $\lambda \in \mathbf{R}^*$. Mostrare che l'applicazione $\tilde{P}: \mathbf{RP}^n \rightarrow \mathbf{RP}^n$, data da $\tilde{P}[X] = [P(X)]$ è ben definita e liscia.

5. Sia M una varietà differenziabile non vuota. Mostrare che lo spazio vettoriale $C^\infty(M)$ è infinito-dimensionale (sugg.: mostrare che se f_1, \dots, f_k sono funzioni in $C^\infty(M)$, con supporti non vuoti e disgiunti, allora sono linearmente indipendenti).

6. Sia M una varietà differenziabile. Mostrare che M ammette un'*esaustione* positiva, ossia esiste una funzione $f \in C^\infty(M)$, tale che

$$f^{-1}((-\infty, c]) = \{x \in M \mid f(x) \leq c\}$$

è compatto, per ogni $c \in \mathbf{R}$ (sugg.: sfruttare la partizione dell'unità subordinata ad un ricoprimento numerabile localmente finito).