

1. Sia M una varietà n -dimensionale, compatta, orientata e senza bordo.
 - (a) Sia $\omega = d\eta$ una n -forma esatta. Allora $\int_M \omega = 0$;
 - (b) $H_{dR}^n(M) \neq 0$, dove $H_{dR}^n(M)$ indica l' n -esimo gruppo di coomologia di De Rham di M .

2. Sia M una varietà n -dimensionale, compatta, orientata e senza bordo. Sia $\Lambda^n(M)$ lo spazio delle n -forme su M . Mostrare che l'applicazione lineare $\int_M: \Lambda^n(M) \rightarrow \mathbf{R}$ passa ad un'applicazione lineare

$$\int_M : H_{dR}^n(M) \rightarrow \mathbf{R}.$$

3. Mostrare che il *cup-product*

$$H_{dR}^p(M) \times H_{dR}^q(M) \rightarrow H_{dR}^{p+q}(M), \quad [\omega] \cup [\eta] := [\omega \wedge \eta]$$

è ben definito.

4. Sia M una varietà n -dimensionale, compatta, orientata, con bordo $\partial M \neq \emptyset$. Sia $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$ una forma chiusa. Allora $\int_{\partial M} \omega = 0$.
5. Sia M una varietà n -dimensionale, connessa, compatta, orientata e senza bordo. Siano α e β due n -forme differenziali su M . Mostrare che

$$\int_M \alpha = \int_M \beta$$

se e solo se α e β differiscono per una forma esatta. (N.B.: la dualità di Poincaré implica $H_{dR}^n(M) \cong \mathbf{R}$).