1. Sia $V = \mathbf{R}^3$ con la base canonica e_1, e_2, e_3 e sia $f = \eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \eta_3 \in T^3(V^*)$, dove η_1, η_2, η_3 denota la base duale di V^*. Verificare che $f \neq Sym(f) + Alt(f)$.

2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, e siano $f \in \bigwedge^2(V^*)$ e $g \in \bigwedge^1(V^*)$. Calcolare $f \wedge g$.

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, e siano $f_1, \dots f_k \in \bigwedge^1(V^*)$. Mostrare che $f_1 \wedge \dots \wedge f_k(v_1, \dots, v_k) = \det(f_i(v_j))$.

4. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\eta_1, \dots, \eta_k \in \bigwedge^1(V^*)$. Mostrare che $\eta_1, \dots, \eta_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \neq 0$.

5. (*Forme decomponibili*). Una k-forma $\omega \in \bigwedge^k(V^*)$ si dice *decomponibile* se si può scrivere come prodotto di 1-forme, ossia $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$, con $\omega_i \in \bigwedge^1(V^*)$.
   (a) Se $\dim V = n$, allora tutte le forme $\omega \in \bigwedge^1(V^*)$ ed $\eta \in \bigwedge^n(V^*)$ sono decomponibili.
   (b) Mostrare che tutte le forme $\chi \in \bigwedge^{n-1}(V^*)$ sono decomponibili.

6. (*Proprietà universale del prodotto esterno*). La mappa

$$\pi : \underbrace{V \times \dots V}_{k \text{ volte}} \to \bigwedge^k(V), \text{definita da } \pi(v_1, \dots, v_k) := v_1 \wedge \dots \wedge v_k,$$

   è k-multilineare alternante. Mostrare che è *universale*, cioè se $A\colon V \times \dots \times V \to W$ è un'applicazione k-multilineare alternante, allora esiste un'unica applicazione lineare $\widetilde{A}\colon \bigwedge^k(V) \to W$ tale che $A = \widetilde{A} \circ \pi$.