

1. Mostrare che il prodotto cartesiano di due varietà differenziabili (senza bordo) è una varietà differenziabile.
2. Mostrare che \mathbf{CP}^n è una varietà complessa.
3. *La retta con due origini.* Sia \overline{X} il quoziente topologico di $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \pm 1\}$ rispetto alla relazione di equivalenza $(x, 1) \sim (x, -1)$, per $x \neq 0$. Verificare che \overline{X} è localmente euclideo, a base numerabile, ma non è di Hausdorff.
4. Verificare che l'unione disgiunta di un'infinità non numerabile di copie di \mathbf{R} è localmente euclideo e di Hausdorff, ma non è a base numerabile.
5. Mostrare che $U(n) = \{A \mid {}^t \bar{A}A = I_n\}$ è una sottovarietà compatta di $M(n, n, \mathbf{C})$ di dimensione reale n^2 , ed $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$ una sottovarietà compatta di $M(n, n, \mathbf{C})$ di dimensione reale $n^2 - 1$.
6. Sia $F: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$, data da $F(x, y, z, w) = (x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + y)$. Mostrare che $(0, 1) \in \mathbf{R}^2$ è un valore regolare di F e che $F^{-1}(0, 1)$ è diffeomorfo a S^2 .
7. Sia $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, data da $F(x, y) = x^3 + xy + y^3$. Determinare per quali valori di $a \in \mathbf{R}$, la curva di livello $F^{-1}(a)$ è una sottovarietà di \mathbf{R}^2 .
8. Sia $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Determinare se la funzione $f: S^1 \rightarrow \mathbf{R}$, data da $f(x, y) = y$ è liscia.