1. *Sia* $f\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ *la proiettività indotta dalla matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Scrivere la formula generale di f *in coordinate omogenee.*
   (ii) Calcolare $f(2:3)$, $f(1:0)$, $f(0:1)$, $f(1:4)$.
   (iii) Scrivere la formula generale di f^{-1} *in coordinate omogenee.*
   (iv) Calcolare $f^{-1}(1:1)$, $f^{-1}(1:3)$, $f^{-1}(0:4)$, $f^{-1}(1:0)$.

Soluzione.
(i) $f((x_0:x_1)) = (2x_0 + x_1 : 5x_0 + x_1)$.
(ii) $f((2:3)) = (7:13)$, $f((1:0)) = (2:5)$, $f((0:1)) = (1:1)$, $f((1:4)) = (6:9)$.
(iii) f^{-1} è indotta dalla matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 5/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, o da una qualunque matrice λA^{-1}, con $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$. Dunque

$$f^{-1}((x_0:x_1)) = (-x_0/3 + x_1/3 : 5x_0/3 - 2x_1/3) = (-x_0 + x_1 : 5x_0 - 2x_1).$$

(iv) $f^{-1}((1:1)) = (0:3)$, $f^{-1}((1:3)) = (2:-1)$, $f^{-1}((0:4)) = (4:-8) = (1:-2)$, $f^{-1}((1:0)) = (-1:5)$.

2. *Determinare la proiettività* $f\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ *che manda i punti* $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ *rispettivamente in* $(1:0)$, $(2:1)$, $(1:-1)$.

Soluzione. Le prime due condizioni danno una matrice della forma $M = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non nulli. La terza condizione implica $A = \lambda \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e

$$f((x_0:x_1)) = (3x_0 - 2x_1 : -x_1).$$

3. *Determinare la proiettività* $f\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ *che manda i punti* $(1:3)$, $(2:-1)$, $(2:1)$ *rispettivamente in* $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$.

Soluzione. La proiettività f cercata è *l'inversa* della proiettività g che manda i punti $(1:0)$, $(0,1)$, $(1:1)$ rispettivamente in $(1:3)$, $(2:-1)$, $(2:1)$. Con un procedimento analogo a quello dell'esercizio precedente, si trova che g è indotta da una qualunque matrice $B = \lambda \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$, con $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Di conseguenza f è indotta da una qualunque matrice μB^{-1}, con $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ad esempio, dalla matrice $\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$, ricaviamo

$$f((x_0:x_1)) = (-5x_0 - 10x_1 : -12x_0 + 4x_1).$$

4. *Determinare la proiettività* $f\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ *che manda i punti* $(1:3)$, $(2:-1)$, $(2:1)$ *rispettivamente in* $(1:1)$, $(3:1)$, $(1:5)$. *Calcolare* $f(1:4)$ *ed* $f(1:1)$.

Soluzione. La proiettività f cercata è la composizione $f = F \circ G^{-1}$, dove G^{-1} è la proiettività che manda i punti $(1:3)$, $(2:-1)$, $(2:1)$ rispettivamente in $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ e G è la proiettività che manda i punti $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ rispettivamente in $(1:1)$, $(3,1)$, $(1:5)$. La proiettività G^{-1} è quella calcolata nell'esercizio (3). La proiettività F è indotta ad esempio dalla matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$. Di conseguenza f risulta

$$f(x_0 : x_1) = (37x_0 - 94x_1 : -11x_0 - 78x_2).$$

Prova: $f(1:3) = (-245 : -245) = (1:1)$, $f(2:-1) = (168:56) = (3:1)$, $f(1:3) = (-20 : -100) = (1:5)$.

$f(1:4) = (-339 : -323)$, $f(1:1) = (-57 : -89)$.

5. *Siano* $l: \ x_0 - x_1 + x_2 = 0$ *ed* $m: \ x_1 - x_2 = 0$ *rette in* $\mathbb{P}^2$. *Sia* $R = (0:1:2) \in \mathbb{P}^2$ *e sia* $\pi_R: l \longrightarrow m$ *la prospettività di centro* R. *Calcolare* $\pi_R(-1:0:1)$.

Soluzione. Osserviamo che $R \notin l, m$ e che $P = (-1:0:1) \in l$. Per definizione $\pi_R(-1:0:1) = \overline{RP} \cap m$. La retta $\overline{RP}$ ha equazione $x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$, da cui risulta $\pi_R(-1:0:1) = (1:1:1)$.

6. *Considerare la proiettività* $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ *indotta dalla matrice* $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare $f(1:0)$ *ed* $f(0:1)$.
   (ii) Calcolare determinare un punto $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$ *tale che* $f((x_0 : x_1)) \neq (x_0 : x_1)$.

Soluzione. La formula generale di f è data da $f((x_0 : x_1)) = (2x_0 : -2x_1)$.
   (i) $f(1:0) = (2:0) = (1:0)$ ed $f(0:1) = (0:-2) = (0:1)$. Si tratta di due punti fissi distinti di f.
   (ii) $f(1:1) = (2:-2) = (1:-1) \neq (1:1)$.

7. *Considerare la proiettività* $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ *indotta dalla matrice* $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. *Determinare i punti fissi di* f.

Soluzione. I punti fissi di f sono le immagini tramite la proiezione canonica $\pi: \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ degli autospazi di M relativi ad autovalori reali:

$$\lambda = 2, \ \ V_2 = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \qquad\qquad \lambda = -2, \ \ V_{-2} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\}.$$

Sono $P = (1:0)$ e $Q = (1:-4)$.

8. *Considerare la proiettività* $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ *indotta dalla matrice* $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Determinare i punti fissi di* f.

Soluzione. Gli autovalori reali di M e i relativi autospazi sono dati da

$$\lambda = (5+\sqrt{5})/2, \ \ V_{(5+\sqrt{5})/2} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ (-1+\sqrt{5})/2 \end{pmatrix}\}, \quad \lambda = (5-\sqrt{5})/2, \ \ V_{(5-\sqrt{5})/2} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ (1+\sqrt{5})/2 \end{pmatrix}\}.$$

I punti fissi di f sono $P = (1 : (-1+\sqrt{5})/2)$ e $Q = (1 : (1+\sqrt{5})/2)$.

9. *Sia l la retta di equazione $x_0+x_1 = 0$. Siano $P = (0 : 1 : -1)$, $Q = (1 : 0 : 0)$ e $R = (1 : -1 : 1)$ tre punti di $\mathbb{P}^2$.*
   (i) Far vedere che i punti $A = (1 : -1 : 0)$, $B = (0 : 0 : 1)$ e $C = (-1 : 1 : 1)$ stanno su l.
   (ii) Far vedere che i punti P, Q e R stanno su una retta m.
   (iii) Dimostrare che esiste una proiettività $f : l \longrightarrow m$ tale che $f(A) = P$, $f(B) = Q$ e $f(C) = R$.
   (iv) Determinare $f(1 : -1 : 1)$.

Soluzione.

(i) I punti $A,\ B,\ C$ stanno su l perché le loro coordinate soddisfano l'equazione $x_0 + x_1 = 0$.

(ii) Poiché $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, i punti $P,\ Q,\ R$ stanno su una stessa retta m in $\mathbb{P}^2$.

(iii) Scriviamo i piani $\alpha,\ \beta$ corrispondenti alle rette l ed m in forma parametrica

$$\alpha : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R}, \quad \beta : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \sigma, \tau \in \mathbb{R}.$$

Costruiamo adesso la proiettività $f : l \cong \mathbb{P}^1 \longrightarrow m \cong \mathbb{P}^1$ con le proprietà richieste. Le coordinate omogenee $(s : t)$ su l e $(\sigma : \tau)$ su m sono quelle indotte dalle equazioni parametriche scelte per α e β. Rispetto a queste scelte, le coordinate omogenee di $A,\ B,\ C$ sono date rispettivamente da $(1 : 0),\ (0 : 1),\ (-1 : 1)$; le coordinate omogenee di $P,\ Q,\ R$ sono date rispettivamente da $(1 : 0),\ (0 : 1),\ (-1 : 1)$. Le matrici invertibili 2×2 della forma

$$M = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

inducono la mappa proiettiva richiesta.

(iv) Il punto $D = (1 : -1 : 1)$ ha coordinate omogenee $(1 : 1)$ in $l \cong \mathbb{P}^1$. L'immagine $f(D)$ ha coordinate omogenee $(-1 : 1)$ in $m \cong \mathbb{P}^1$ e coordinate omogenee $(1 : -1 : 1)$ in $\mathbb{P}^2$.

10. *Sia l una retta in $\mathbb{P}^2$ e sia $\varphi : l \longrightarrow l$ una proiettività.*
    (i) Far vedere che se φ fissa tre punti distinti, allora $\varphi(P) = P$ per ogni $P \in l$.
    (ii) Dare esempi di mappe proiettive $\varphi : l \longrightarrow l$ che fissano 0,1, oppure 2 punti (basta dare le matrici corrispondenti).

Soluzione.

(i) Se una proiettività $\varphi : l \longrightarrow l$ fissa tre punti distinti, ad esempio $(1 : 0)$, $(0 : 1)$, $(1 : 1)$, è l'identità: le matrici che inducono una mappa con le proprietà richieste sono infatti della forma

$$M = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(ii) Sia $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice che induce φ. Osserviamo che un punto $P = (p_0 : p_1)$ è un punto fisso di φ se e solo se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

cioè se e solo se il vettore $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ è autovettore di M, relativo ad un autovalore reale non nullo.

Per ogni $\theta \neq 0, \pi$, le matrici $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ inducono $\varphi : l \longrightarrow l$ senza punti fissi;

Una mappa proiettiva $\varphi : l \longrightarrow l$ con un solo punto fisso è indotta da una matrice con autovalori reali e coincidenti e autospazio corrispondente di dimensione 1. Ad esempio:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

In questo caso, il punto fisso ha coordinate omogenee $(1:0)$.

Una mappa proiettiva $\varphi : l \longrightarrow l$ con due punti fissi è indotta da una matrice con autovalori reali e distinti. Ad esempio

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \lambda \neq \mu.$$

In questo caso, i punti fissi hanno coordinate omogenee $(1:0)$ e $(0:1)$.

11. *Sia l una retta a siano P, Q e R tre punti distinti su l.*
    - *(i) Far vedere che esiste esattamente una proiettività φ con $\varphi(Q) = R$ e tale che P è il suo unico punto fisso.*
    - *(ii) Descrivere un procedimento per costruire $\varphi(R)$.*

Soluzione.

(i) Per semplicità prendiamo P, Q, R su $l \cong \mathbb{P}^1$ di coordinate omogenee rispettivamente $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$. Sia $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice che induce φ. Il punto P è l'unico punto fisso di φ se la matrice M è della forma

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Se richiediamo anche $\varphi(Q) = R$, la matrice M deve soddisfare $\lambda = \mu$ e dunque essere della forma

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Da qui l'unicità di φ.

(ii) Introduciamo una retta ausiliaria m, che interseca l nel punto P e consideriamo una prospettività di centro α, esterno ad l ed m. Siano $P^0 = \pi_\alpha(P)$ e $Q^0 = \pi_\alpha(Q)$ in m. Per ogni $\alpha' \in \overline{Q^0R}$, la proiettività $\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha$ fissa P, manda Q in R, e fissa anche il punto $S = \overline{\alpha\alpha'} \cap l$. Si ha che $S = P$, e di conseguenza $\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha$ ha un unico punto fisso, se e solo se $\alpha' \in \overline{\alpha P} \cap \overline{Q^0R}$.

12. *Siano l ed m rette in $\mathbb{P}^2$. Siano $A,\ B,\ C\ \in l$ e $P,\ Q,\ R\ \in m$ due terne di punti distinti (disegnati sulle rette in questo ordine, da sinistra verso destra).*
    - *(i) Costruire geometricamente la proiettività $f : l \longrightarrow m$, tale che $f(A) = Q$, $f(B) = P$, $f(C) = R$.*

(ii) Costruire geometricamente la proiettività $f: l \longrightarrow m$, tale che $f(A) = P$, $f(B) = R$, $f(C) = Q$.

Soluzione.

(i) Applichiamo la costruzione di Steiner: i punti

$$\alpha = \overline{Af(B)} \cap \overline{Bf(A)} = \overline{AP} \cap \overline{BQ}, \qquad \beta = \overline{Bf(C)} \cap \overline{Cf(B)} = \overline{BR} \cap \overline{CP}$$

individuano la retta ausiliaria n. Consideriamo le prospettività $\pi_B: n \longrightarrow m$ e $\pi_{f(B)} = \pi_P: l \longrightarrow n$. La proiettività

$$\pi_B \circ \pi_P: l \longrightarrow m$$

manda, come f, la terna di punti distinti $A, B, C \in l$ nella terna di punti distinti $P, Q, R \in m$. Dunque coincide con f.

(ii) Applichiamo la costruzione di Steiner: i punti

$$\alpha = \overline{Af(B)} \cap \overline{Bf(A)} = \overline{AR} \cap \overline{BP}, \qquad \beta = \overline{Bf(C)} \cap \overline{Cf(B)} = \overline{BQ} \cap \overline{CR}$$

individuano la retta ausiliaria n. Consideriamo le prospettività $\pi_B: n \longrightarrow m$ e $\pi_{f(B)} = \pi_R: l \longrightarrow n$. La proiettività

$$\pi_B \circ \pi_R: l \longrightarrow m$$

manda, come f, la terna di punti distinti $A, B, C \in l$ nella terna di punti distinti $P, Q, R \in m$. Dunque coincide con f.

13. *Siano $P, Q, R \in \mathbb{P}^1$ punti distinti. Costruire geometricamente una proiettività $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tale che $f(P) = Q$, $f(Q) = R$, $f(R) = P$.*

Soluzione. Per costruire f, introduciamo innanzitutto un retta ausiliaria m, che non passa per nessuno dei tre punti $P, Q, R \in l = \mathbb{P}^1$. Sia α un punto esterno ad l ed m, sia $\pi_\alpha: l \longrightarrow m$ la prospettività di centro α e siano $P_0 = \pi_\alpha(P)$, $Q_=\pi_\alpha(Q)$, $R_0 = \pi_\alpha(R)$. Adesso applichiamo la costruzione di Steiner per costruire una proiettività $g: m \longrightarrow l$, che manda P_0, Q_0, R_0 rispettivamente in Q, R, P. I punti

$$\alpha = \overline{P_0 g(Q_0)} \cap \overline{Q_0 g(P_0)} = \overline{P_0 R} \cap \overline{Q_0 Q}, \qquad \beta = \overline{Q_0 g(R_0)} \cap \overline{R_0 g(Q_0)} = \overline{Q_0 P} \cap \overline{R_0 R}$$

individuano la retta ausiliaria n. Consideriamo le prospettività $\pi_{Q_0}: n \longrightarrow l$ e $\pi_{g(Q_0)} = \pi_R: m \longrightarrow n$. La proiettività

$$\pi_{Q_0} \circ \pi_R: m \longrightarrow l$$

manda, come g, la terna di punti distinti $P_0, Q_0, R_0 \in m$ nella terna di punti distinti $Q, R, P \in l$. Dunque coincide con g. La proiettività cercata $f: l \longrightarrow l$ è data dalla composizione

$$f = g \circ \pi_\alpha = \pi_{Q_0} \circ \pi_R \circ \pi_\alpha.$$

14. *Siano $P, Q, R, S \in \mathbb{P}^1$ punti distinti.*

(i) Costruire geometricamente una proiettività $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tale che $f(Q) = Q$, $f(P) = R$, $f(R) = P$.

(ii) Determinare $f(S)$.

Soluzione.

(i) Introduciamo una retta ausiliaria m che passa per il punto fisso Q. Sia α un punto esterno ad l ed m, sia $\pi_\alpha : l \longrightarrow m$ la prospettività di centro α e siano $P_0 = \pi_\alpha(P)$ e $Q_0 = \pi_\alpha(Q)$. Sia β il punto di intersezione

$$\beta = \overline{P_0R} \cap \overline{R_0P}$$

e sia $\pi_\beta : m \longrightarrow l$ la prospettività di centro β. La proiettività $\pi_\beta \circ \pi_\alpha : l \longrightarrow l$ manda, come f, la terna di punti distinti $P,\ Q,\ R$ nella terna di punti distinti $R,\ Q,\ P$. Dunque coincide con f.

(ii) $f(S) = \pi_\beta \circ \pi_\alpha(S) = \pi_\beta(\pi_\alpha(S)) = \pi_\beta(\overline{\alpha S} \cap m) = ...$

15. *Sia $T \subset \mathbb{P}^2$ un triangolo di vertici A_1, A_2 e A_3. Siano a_1, a_2 e a_3 i lati di T corrispondenti: $A_i \notin a_i$. Sia P un punto e siano Q_i i punti di intersezione $PA_i \cap a_i$, per $i = 1, 2, 3$. Dimostrare che i tre punti $Q_iQ_j \cap A_iA_j$ stanno su una retta.*

Soluzione. Applicare il teorema di Desargues ai triangoli $A_1A_2A_2$ e $Q_1Q_2Q_2$: sono triangoli che hanno i vertici su tre rette l_1, l_2, l_3 uscenti dallo stesso punto P. Segue che i punti

$$\overline{A_1A_2} \cap \overline{Q_1Q_2} \qquad \overline{A_2A_3} \cap \overline{Q_2Q_3} \qquad \overline{A_1A_3} \cap \overline{Q_1Q_3}$$

sono collineari.

16. *Sia O un punto di $\mathbb{P}^2$ e siano l, m e n tre rette passanti per O. Siano P e Q due punti e sia $f : l \longrightarrow n$ la prospettività di centro P di l su m seguita dalla prospettività di centro Q di m su n. Dimostrare che f è una prospettività di centro un punto R che sta sulla retta PQ.*

Soluzione. Poiché $\pi_Q \circ \pi_P(O) = O$, segue che $\pi_Q \circ \pi_P$ è una prospettività: $\pi_Q \circ \pi_P = \pi_R$. Siano A, B due punti distinti su l, siano A', B' e siano A'', B'' le loro immagini tramite $\pi_Q \circ \pi_P = \pi_R$. Il centro della prospettività π_R è il punto di intersezione $R = \overline{AA''} \cap \overline{BB''}$. La collinearità di P, Q, R segue applicando il teorema di Desargues ai triangoli $AA'A''$ e $BB'B''$ con i vertici sulle rette l, m, n.

17. *Siano $A = (1 : 0)$, $B = (1 : 6)$, $C = (1 : 3)$. Calcolare D tale che $(ABCD) = -1$.*

Soluzione. $D = (0 : 1)$.

18. *Siano $A = (1 : 1)$, $B = (1 : 2)$, $C = (1 : 8)$. Calcolare D tale che $(ABCD) = 1$.*

Soluzione. $D = (1 : 8)$.

19. *Far vedere che i punti $A = (1 : 0 : 1)$, $B = (0 : 1 : 1)$, $C = (2 : 1 : 3)$ e $D = (3 : -1 : 2)$ stanno su una retta. Determinare i birapporti $(ABCD)$ e $(BACD)$.*

Soluzione. Sia l la retta per i punti A e B. Il piano corrispondente in $\mathbb{R}^3$ ha equazione $\alpha :\ x_0 + x_1 - x_2 = 0$. I punti C e D appartengono ad l, in quanto le loro coordinate soddisfano l'equazione di α. Fissiamo i punti A e B su l e scriviamo il piano α in forma parametrica:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Troviamo

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};$$

di conseguenza le coordinate omogenee di A, B, C, D in $l \cong \mathbb{P}^1$ (identificazione subordinata alla scelta di $\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}$ come base del piano α) sono rispettivamente

$$(1:0), \quad (0:1), \quad (2:1), \quad (3:-1).$$

Adesso $(ABCD) = -3/2$ e $(BACD) = -2/3$.

20. *Far vedere che i punti $P = (1:1:1)$, $Q = (2:1:3)$ e $R = (0:1:-1)$ stanno su una retta l. Trovare il punto $S \in l$ tale che il birapporto $(PQRS)$ sia uguale a 3.*

Soluzione. Sia l la retta per i punti P e Q. Il piano corrispondente in $\mathbb{R}^3$ ha equazioni parametriche

$$\alpha \quad \begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Poiché

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},$$

si ha che $R \in l$; inoltre le coordinate omogenee di P, Q, R in $l \cong \mathbb{P}^1$ (identificazione subordinata alla scelta di $\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\}$ come base del piano α) sono rispettivamente

$$(1:0), \quad (0:1), \quad (2:-1).$$

Il punto $S = (x_0 : x_1)$, tale che $(PQRS) = 3$, deve soddisfare

$$\frac{x_0}{-2x_1} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 + 6x_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = (-6:1).$$

Le coordinate omogenee di S in $\mathbb{P}^2$ sono date da

$$(-6\cdot 1 + 1\cdot 2 : -6\cdot 1 + 1\cdot 1 : -6\cdot 1 + 1\cdot 3) = (-4:-5:-3).$$

21. *Sia r una retta in $\mathbb{P}^2$. Costruire geometricamente una proiettività proiettiva $f : r \longrightarrow r$ che manda quattro punti distinti A, B, C e D in C, D, A e B (in questo ordine).*

Soluzione. La mappa f esiste perché $(ABCD) = (CDAB)$ ed è completamente determinata dalle immagini di A, B, C cha vanno rispettivamente in C, D, A. Introduciamo una retta ausiliaria m e siano A^0, B^0, C^0 i punti (distinti) su m ottenuti mediante una prospettività π_R, di centro R esterno ad l ed m. Adesso costruiamo una proiettività $g\colon m \longrightarrow l$ che manda i punti A^0, B^0, C^0

rispettivamente in $C,\ D,\ A$ (usando la costruzione di Steiner). La retta di Steiner è quella passante per

$$P=\overline{A^0 g(B^0)}\cap\overline{B^0 g(A^0)}=\overline{A^0 D}\cap\overline{B^0 C},\qquad Q=\overline{B^0 g(C^0)}\cap\overline{C^0 g(B^0)}=\overline{B^0 A}\cap\overline{C^0 D}.$$

Quindi

$$g=\pi_{B^0}\circ\pi_{f(B^0)}=\pi_{B^0}\circ\pi_D,\qquad f=\pi_{B^0}\circ\pi_D\circ\pi_R.$$

Controllare che $f(D)=B$.

22. *Scrivere una matrice M che induce una proiettività $f\colon \mathbb{P}^1\longrightarrow\mathbb{P}^1$ con punti fissi $A=(1:1)$ e $B=(1:-1)$. Calcolare $(ABPf(P))$, dove $P\in\mathbb{P}^1$ è un punto arbitrario.*

Soluzione. La matrice

$$M=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

ha autovalori $\lambda=1,-1$, con autospazi rispettivamente $V_1=span\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $V_{-1}=span\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
La proiettività indotta da M è data da $f(x_0:x_1)=(x_1:x_0)$ ed ha punti fissi $A=(1:1)$ e $B=(1:-1)$.
$(ABPf(P))=-1$.

23. *Sia l una retta e sia $\varphi:l\longrightarrow l$ una proiettività. Siano dati: un punto P fisso di φ e punti A, A', B e B' tali che $\varphi(A)=A'$ e $\varphi(B)=B'$. Costruire Q il secondo punto fisso di φ.*

Soluzione. Introduciamo una retta ausiliaria m, che interseca l nel punto P e consideriamo una prospettività di centro α, esterno ad l ed m. Siano $A^0=\pi_\alpha(A)$ e $B^0=\pi_\alpha(B)$ in m. Per $\alpha'=\overline{A^0A'}\cap\overline{B^0B'}$, la proiettività $\pi_{\alpha'}\circ\pi_\alpha$ fissa P, manda A in A' e B in B'. La proiettività $\pi_{\alpha'}\circ\pi_\alpha$ fissa anche il punto $S=\overline{\alpha\alpha'}\cap l$. Si ha che $S=P$, e di conseguenza $\pi_{\alpha'}\circ\pi_\alpha$ ha un unico punto fisso, se e solo se $\alpha'\in\overline{\alpha P}\cap\overline{B^0B'}$.

24. *Sia l una retta e sia $\varphi:l\longrightarrow l$ una proiettività. Supponiamo che per un punto $P\in l$ abbiamo che $\varphi(P)\neq P$ mentre $\varphi^2(P)=P$. Dimostrare che φ è una involuzione, cioè che $\varphi^2(Q)=Q$ per ogni $Q\in l$.*

Soluzione. Per semplicità possiamo prendere $P=(1:0)$ e $\varphi(P)=(0:1)$ (è possibile perché $P\neq\varphi(P)$). Le matrici che inducono φ sono della forma

$$M=\begin{pmatrix}0&\lambda\\\mu&0\end{pmatrix},\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Poiché $M^2=\begin{pmatrix}0&\lambda\mu\\\lambda\mu&0\end{pmatrix}$, si ha che $\varphi\circ\varphi=Id$, cioè φ è un'involuzione.

25. *Sia l una retta in $\mathbb{P}^2$. Far vedere che nessuna involuzione $\varphi:l\longrightarrow l$ ha esattamente 1 punto fisso.*

Soluzione. Sia P l'unico punto fisso di φ. Per semplicità assumiamo che abbia coordinate omogenee $(1:0)$ in $l \cong \mathbb{P}^1$. Sia $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice che induce φ. Allora M è della forma

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Poiché $M^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda\mu \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha che $\varphi \circ \varphi \neq Id$, cioè φ non è un'involuzione.

26. *Siano P e Q due punti distinti su una retta l. Dimostrare che c'è un'unica involuzione φ che fissa P e Q.*

Soluzione. Per semplicità possiamo prendere $P = (1:0)$ e $Q = (0:1)$ (è possibile perché $P \neq Q$). Sia $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice che induce φ. Allora

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Poiché $M^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se e solo se $\lambda = \pm\mu$, si ha che φ è un'involuzione diversa dall'identità se e solo se

$$M = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque φ è unica.