1. (i) Siano $(1:2:3)$, $(1:0:-1)$ e $(2:1:0)$ tre punti in $\mathbb{P}^2$. Decidere se stanno su una retta o meno.
   (ii) Siano $P=(1:1:-1)$ e $Q=(1:1:0)$ due punti in $\mathbb{P}^2$. Determinare la retta per P e Q.
   (iii) Siano $2x_0-x_1+2x_2=0$, $-x_0+2x_1-x_2=0$ e $x_1=0$ tre rette in $\mathbb{P}^2$. Decidere se passano per uno stesso punto.
   (iv) Determinare l'intersezione delle rette $x_0-x_1+x_2=0$ e $-2x_0+x_1+x_2=0$ in $\mathbb{P}^2$.

Soluzione.

(i) Poiché
$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=1/2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3/2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$
i vettori $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3\setminus\{O\}$ sono complanari (linearmente dipendenti) e i tre punti $(1:2:3)$, $(1:0:-1)$, $(2:1:0)$ di $\mathbb{P}^2$ stanno sulla stessa retta proiettiva.

(ii) Poiché i punti $P,\ Q\in\mathbb{P}^2$ sono distinti, esiste un'unica retta proiettiva per P e Q. Tale retta (o meglio, il piano di $\mathbb{R}^3$ che di cui la retta è immagine tramite la proiezione canonica) ha equazione cartesiana $x_0-x_1=0$.

(iii) Le tre rette proiettive passano per uno stesso punto in $\mathbb{P}^2$ se e solo se i corrispondenti piani in $\mathbb{R}^3$ passano per una stessa retta. L'intersezione di tali piani è data dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo
$$\begin{cases}x_1=0\\2x_0-x_1+2x_2=0\\-x_0+2x_1-x_2=0,\end{cases}$$
e coincide con $span\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\}$. Dunque i tre piani passano per la retta $X=t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$ e le corrispondenti rette proiettive si incontrano nel punto $P=(-1:0:1)\in\mathbb{P}^2$.

(iv) Poiché si tratta di due rette proiettive distinte (i corrisponedenti piani in $\mathbb{R}^3$ sono distinti), la loro intersezione sarà un punto in $\mathbb{P}^2$. L'intersezione dei corrispondenti piani in $\mathbb{R}^3$ è data dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo
$$\begin{cases}x_0-x_1+x_2=0\\-2x_0+x_1+x_2=0,\end{cases}$$
e coincide con $span\{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\}$. L'intersezione delle due rette è il punto $P=(2:3:1)\in\mathbb{P}^2$.

2. Sia r la retta passante per $P=(1:0:-1)$ e $Q=(2:1:0)$.
   (i) Far vedere che $R=(-1:-1:-1)$ sta su r.
   (ii) Determinare $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tali che $R=\lambda P+\mu Q$.
   (iii) Determinare $\lambda',\mu'\in\mathbb{R}$ tali che $Q=\lambda' P+\mu' R$.

Soluzione. Poiché i punti $P,\ Q \in \mathbb{P}^2$ sono distinti, esiste un'unica retta proiettiva r per P e Q:

$$r: \quad x_0 - 2x_1 + x_2 = 0 \qquad (*).$$

Il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$ ha un'equazione parametrica data da

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu \\ \mu \\ -\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

e i punti di r hanno coordinate omogenee

$$(\lambda + 2\mu : \mu : -\lambda), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \text{ non entrambi nulli.}$$

(i) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ soddisfa l'equazione $(*)$. Quindi $R \in r$.

(ii) R corrisponde a $\lambda = 1,\ \mu = -1$.

(iii) Lo stesso piano di $\mathbb{R}^3$ ha anche equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' - \mu' \\ -\mu' \\ -\lambda' - \mu' \end{pmatrix}, \quad \lambda', \mu' \in \mathbb{R},$$

e i punti di r hanno anche coordinate omogenee

$$(\lambda' - \mu' : -\mu' : -\lambda' - \mu'), \quad \lambda', \mu' \in \mathbb{R}, \text{ non entrambi nulli.}$$

Q corrisponde a $\lambda' = 1,\ \mu' = -1$.

3. Sia l la retta passante per i punti $(0 : 1 : -1)$ e $(2 : 1 : 0)$ e sia m la retta passante per i punti $(0 : 0 : 1)$ e $(2 : 1 : 1)$.
   (i) Determinare se $P = (1 : 8 : 0)$ appartiene ad l o ad m.
   (ii) Determinare tre punti su l e tre punti su m.
   (iii) Determinare $l \cap m$.

Soluzione. $l: \quad x_0 - 2x_1 - 2x_2 = 0, \qquad m: \quad x_0 - 2x_1 = 0.$

(i) $P \notin l$ e $P \notin m$.

(ii) $P = (0 : 1 : -1),\ Q = (2 : 1 : 0),\ R = (2 : 2 : -1) \in l$,
$L = (2 : 1 : 0),\ M = (0 : 0 : 1),\ N = (2 : 1 : 3) \in m$.

(iii) $l \cap m = (0 : 0 : 1)$.

4. Sia l la retta di equazione $x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$ in $\mathbb{P}^2$. Trovare tre punti P, Q e R su l e determinare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $R = \lambda P + \mu Q$.

Soluzione. Un'equazione parametrica del piano in $\mathbb{R}^3$ che corrisponde ad l è ad esempio

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

I punti di l hanno quindi coordinate omogenee

$$(\lambda : -\lambda + 2\mu : \mu), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \text{ non entrambi nulli.}$$

Tre punti distinti sulla retta l sono ad esempio
$P = (1 : -1 : 0), \quad \lambda = 1, \ \mu = 0,$
$Q = (0 : 2 : 1), \quad \lambda = 0, \ \mu = 1,$
$R = (1 : 3 : 2), \quad \lambda = 1, \ \mu = 2.$

5. Siano l e l' due rette proiettive di equazioni $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ e $2x_0 - x_1 - x_2 = 0$. Trovare il punto di intersezione $P = l \cap l' \in \mathbb{P}^2$. Trovare altre due rette della stella di rette passanti per P.

Soluzione. l ed l' sono rette distinte. L'intersezione è il punto $P = (0 : 1 : -1) \in \mathbb{P}^2$. Il sistema lineare omogeneo che definisce $l \cap l'$ è

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_0 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \tag{$*$}$$

Ogni combinazione lineare di queste due equazioni determina un piano in $\mathbb{R}^3$ passante per la retta soluzione del sistema (*) e una retta proiettiva passante per il punto $P \in \mathbb{P}^2$. Ad esempio la somma e la differenza delle equazioni danno $m: \ 3x_0 = 0, \quad n: \ -x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0.$

6. Siano $P = (2 : -1 : 0)$ e $Q = (1 : 3 : 0)$ due punti in $\mathbb{P}^2$ e sia m la retta di equazione $x_1 - 3x_2 = 0$. Trovare il punto di intersezione fra m e la retta PQ (cioè, la retta che passa per P e Q).

Soluzione. $\overline{PQ} : x_2 = 0, \quad m \cap \overline{PQ} = (1 : 0 : 0).$

7. Sia r la retta passante per $P = (1 : 3 : -1)$ e $Q = (1 : 1 : 0)$. Sia m la retta di equazione $x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$.
   (i) Determinare se $R = (1 : 3 : -2)$ appartiene ad m.
   (ii) Calcolare $r \cap m$.
   (iii) Determinare un punto S su m e la retta per R e S.

Soluzione.
(i) $R \notin m$.
(ii) $r: \quad x_0 - x_1 - 2x_2 = 0 \ , \ r \cap m = (1 : 1 : 0).$
(iii) Sia ad esempio $S = (2 : 0 : -1) \in m$. La retta per $S = (2 : 0 : -1), \ P = (1 : 3 : -2)$ è $x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$.

8. Siano l e m due rette proiettive di equazioni $x_0 + x_1 - 4x_2 = 0$ e $x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$. Trovare il punto di intersezione $P = l \cap m \in \mathbb{P}^2$. Trovare altre due rette della stella di rette passanti per P.

Soluzione. Le rette m, l sono distinte. Il loro punto di intersezione è $P = (1 : -1 : 0)$. Altre due rette proiettive per P sono ad esempio $\quad x_0 + x_1 = 0, \quad 2x_0 + 2x_1 - 6x_2 = 0.$

9. Siano $P = (2 : 1 : 1)$ e $Q = (3 : 3 : 1)$ due punti in $\mathbb{P}^2$ e sia m la retta di equazione $x_0 + x_1 - 3x_2 = 0$. Trovare il punto di intersezione fra m e la retta PQ (cioè, la retta che passa per P e Q).

Soluzione. $\overline{PQ}: \quad -2x_0 + x_1 + 3x_2 = 0, \quad m \cap \overline{PQ} = (2:1:1).$

10. Sia l la retta di equazione $x_0 + 2x_1 = 0$ in $\mathbb{P}^2$. Trovare tre punti P, Q e R su l e determinare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $R = \lambda P + \mu Q$.

Soluzione. $P = (-2:1:0),\ Q = (0:0:1),\ R = 2P + 3Q = (-4:2:3) \in l.$

11. Siano $r: \quad 2x_0 + 2x_2 = 0, \quad s: \quad 2x_1 - x_2 = 0$ e $\quad l: \quad x_1 = 0$ tre rette in $\mathbb{P}^2$.
    (i) Calcolare $P = r \cap s$;
    (ii) Calcolare $Q = r \cap l$;
    (iii) Calcolare la retta per P e Q.

Soluzione. $P = r \cap s = (-2:1:2), \qquad Q = r \cap l = (1:0:-1), \quad \overline{PQ}: \quad x_0 + x_2 = 0.$