COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

---

1. *Siano dati i vettori* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e il piano* $\alpha : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x - y = 0 \\ x - w = 0 \end{cases} \right\}$ *in* $\mathbf{R}^4$.
   (i) Calcolare $\|\mathbf{v}\|$, $\|\mathbf{w}\|$, $\cos \widehat{\mathbf{vw}}$.
   (ii) Determinare la dimensione ed una base del complemento ortogonale $\alpha^\perp$ *di* α *in* $\mathbf{R}^4$.
   (iii) Calcolare la distanza di $\mathbf{v}$ *da* α.

(i)

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{5}, \quad \|\mathbf{w}\| = \sqrt{10}, \quad \cos \widehat{\mathbf{vw}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \sqrt{2}/2.$$

(ii) Poiché $\dim \alpha = 2$, il suo complemento ortogonale ha dimensione $\dim \alpha^\perp = 2$. Infatti

$$\alpha^\perp = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base di } \alpha^\perp.$$

(iii) La distanza di $\mathbf{v}$ da α è data da

$$d(\mathbf{v}, \alpha) = d(\mathbf{v}, \pi_\alpha(\mathbf{v})) = \|\mathbf{v} - \pi_\alpha(\mathbf{v})\|,$$

dove $\pi_\alpha(\mathbf{v})$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su α. Se $\{e_1, e_2\}$ è una base ORTONORMALE di α, allora $\pi_\alpha(\mathbf{v}) = (e_1 \cdot \mathbf{v})e_1 + (e_2 \cdot \mathbf{v})e_2$. Una base di α è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Applicando ad essa il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt troviamo una base ortonormale. Ad esempio

$$\{e_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}\},$$

da cui

$$\pi_\alpha(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \qquad d(\mathbf{v}, \alpha) = \sqrt{21}/3.$$

2. *Sia* π *il piano di equazione* $X - 2Y = 0$ *in* $\mathbf{R}^3$.
   (i) Scrivere la formula generale della riflessione S_π *rispetto a* π.
   (ii) Calcolare $S_\pi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $S_\pi(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix})$, $S_\pi(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.
   (iii) Calcolare l'immagine tramite S_π *del piano* $Y = 0$.

(i) La retta normale al piano π e passante per un generico punto $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Essa interseca π nel punto A_π (che dipende da A) corrispondente al valore del parametro $t = \frac{(2b-a)}{5}$

$$A_\pi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \frac{(2b-a)}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(4a+2b)}{5} \\ \frac{(2a+b)}{5} \\ c \end{pmatrix}.$$

Il punto simmetrico di A rispetto a π è il punto corrispondente al valore del parametro $t = 2\frac{(2b-a)}{5}$, ossia

$$S_\pi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + 2\frac{(2b-a)}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b \\ \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b \\ c \end{pmatrix}.$$

Si può verificare che effettivamente

$$d(A, A_\pi) = d(S_\pi(A), A_\pi).$$

La formula generale per S_π è data da

$$S_\pi \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Si tratta di un'isometria lineare, dal momento che il piano π passa per l'origine.

N.B. La matrice $\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale con determinante uguale a -1.

(ii) Si ha

$$S_\pi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_\pi(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad S_\pi(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono tre punti non allineati sul piano $Y = 0$, l'immagine tramite S_π del piano $Y = 0$ è data dal piano passante per i punti

$$S_\pi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_\pi(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad S_\pi(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

la cui equazione risulta $4X - 3Y = 0$.

3. *Sia data la conica* $\mathcal{C}: \quad 2xy + \sqrt{2}y = 1$ *in* $\mathbf{R}^2$.
   (i) Determinare la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$.
   (ii) Scrivere la formula generale di un'isometria del piano che riduce $\mathcal{C}$ *nella forma canonica metrica trovata.*
   (iii) Dire se esiste un'isometria del piano che porta la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ *in* $\mathcal{C}$, *spiegando la risposta.*

(i) La matrice associata alla parte quadratica dell'equazione della conica è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ e autospazi rispettivamente $V_1 = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $V_{-1} = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. L'isometria lineare

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2X' - \sqrt{2}/2Y' \\ \sqrt{2}/2X' + \sqrt{2}/2Y' \end{pmatrix},$$

che è una rotazione $R_{\pi/4}$ di un angolo $\theta = \pi/4$ intorno all'origine, porta l'equazione nella forma

$$(X')^2 - (Y')^2 + X' + Y' = 1.$$

La traslazione $T_{\mathbf{p}}$ di passo $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} X' = \bar{X} - 1/2 \\ Y' = \bar{Y} - 1/2 \end{cases}$$

porta l'equazione della conica nella forma canonica metrica

$$\bar{X}^2 - \bar{Y}^2 = 1.$$

La conica è un'iperbole equilatera.

(ii) L'isometria del piano che riduce $\mathcal{C}$ nella forma canonica metrica trovata è data dalla composizione $T_{\mathbf{p}} \circ R_\theta$.

(iii) Non esiste un'isometria del piano che porta la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ in $\mathcal{C}$, perché si tratta di due iperboli con semiassi diversi.

4. *Date le rette l, m e il punto P della figura qui sotto, disegnare la retta r passante per P, che incontra l ed m all'infinito.*

Questo esercizio si risolve applicando il teorema di Desargues: vedi Problema 1 (e Figura 2) delle dispense sul Teorema di Desargues.