1. Complementi ortogonali. Proiezioni.

Sia U un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$.

Definizione. . Un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ si dice ortogonale a U se è ortogonale a tutti gli elementi di U. L'*ortogonale* $U^\perp$ di U è per definizione

$$U^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot u = 0,\ \forall u \in U\}.$$

Proposizione. *$U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in U^\perp$, $\lambda \in \mathbf{R}$ e sia $\mathbf{u}$ un arbitrario elemento di U. Dalle proprietà del prodotto scalare e dalle ipotesi segue che

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot u = \mathbf{x} \cdot u + \mathbf{y} \cdot u = 0 + 0 = 0, \qquad (\lambda \mathbf{x}) \cdot u = \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \lambda 0 = 0.$$

In altre parole, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in U^\perp$ e $\lambda\mathbf{x} \in U^\perp$, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, come richiesto.

Esempio.

(i) Sia $U = \{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$. Allora $U^\perp = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mid x_1 + 3x_2 = 0\}$ è la retta per l'origine ortogonale a $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

(ii) Sia $U = \{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$. Allora $U^\perp = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mid x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\}$ è il piano per l'origine ortogonale a $\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$.

(iii) Sia $U = \{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$. Allora $U^\perp = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}\}$ è la retta per l'origine parallela a $\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$.

• Se U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$ di dimensione k e $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$è una base di U, allora

$$U^\perp = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0 \end{cases} \right\}.$$

In questo caso, $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di dimensione $n-k$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} \in U^\perp$. Segue immediatamente dalla definizione che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = \ldots = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0$. Viceversa, supponiamo che $\mathbf{x}$ soddisfi il sistema $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = \ldots = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0$. Poiché un arbitrario elemento di U si scrive come $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{u}_k$, si ha

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0.$$

In altre parole, $\mathbf{x} \in U^\perp$. Questa caratterizzazione esprime $U^\perp$ come lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di k equazioni indipendenti. Di conseguenza, $U^\perp$ ha dimensione $n-k$.

Esercizio. Verificare che $U \cap U^\perp = \{0\}$.

• Se U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$, il sottospazio $U^\perp$ si chiama complemento ortogonale di U. Lo spazio $\mathbf{R}^n$ si decompone infatti come somma diretta di U e $U^\perp$

$$\mathbf{R}^n = U \oplus U^\perp \qquad U \cap U^\perp = \{0\}.$$

In particolare, ogni elemento $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ si scrive *in modo unico* come somma di un elemento in U e un elemento in $U^\perp$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_U + \mathbf{x}_{U^\perp}, \qquad \mathbf{x}_U \in U, \;\; \mathbf{x}_{U^\perp} \in U^\perp, \qquad \text{e vale} \qquad \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_U\|^2 + \|\mathbf{x}_{U^\perp}\|^2.$$

Definizione. Per definizione gli elementi $\mathbf{x}_U$ e $\mathbf{x}_{U^\perp}$ sono rispettivamente le proiezioni ortogonali di $\mathbf{x}$ su U e su $U^\perp$

$$\mathbf{x}_U = \pi_U(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}_{U^\perp} = \pi_{U^\perp}(\mathbf{x}).$$

Esercizio. Esiste $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortogonale di $\mathbf{R}^n$, con la proprietà che $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ è una base ortogonale di U e $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortogonale di $U^\perp$.

• Sia $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortogonale di $\mathbf{R}^n$, con la proprietà che $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ è una base ortogonale di U e $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortogonale di $U^\perp$. In questa base,

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \ldots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k}\mathbf{u}_k + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_{k+1}}{\mathbf{u}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_{k+1}}\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_n}{\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n}\mathbf{u}_n.$$

Ne segue che

$$\mathbf{x}_U = \pi_U(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \ldots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k}\mathbf{u}_k \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{U^\perp} = \pi_{U^\perp}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_{k+1}}{\mathbf{u}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_{k+1}}\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_n}{\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n}\mathbf{u}_n.$$

Proposizione. *Sia U un sottospazio di $\mathbf{R}^n$, sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ e sia $\mathbf{x}_U$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su U. Allora, per ogni $\mathbf{u} \in U$*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_U) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{u} \in U$ un elemento arbitrario. L'identità

$$\mathbf{x} - \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_U + \mathbf{x}_U - \mathbf{u}, \qquad \text{con} \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_U \in U, \;\; \mathbf{x}_U - \mathbf{u} \in U^\perp$$

scompone di $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ come somma di due vettori ortogonali. In particolare implica

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_U\|^2 + \|\mathbf{x}_U - \mathbf{u}\|^2$$

e

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_U\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_U\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|$$

come richiesto.