Spazi vettoriali euclidei.

1. Prodotto scalare, lunghezza e ortogonalità in $\mathbf{R}^n$.

Consideriamo lo spazio vettoriale

$$\mathbf{R}^n = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\},$$

con la somma fra vettori e il prodotto di un vettore per uno scalare definiti rispettivamente da

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Definizione. (*Prodotto scalare.*) Dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^n$, il *prodotto scalare* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il numero reale

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

• Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà

(i) *(Proprietà commutativa)* Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x};$$

(ii) *(Proprietà distributiva)* Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z};$$

(iii) *(Omogeneità)* Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ ed ogni $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{y});$$

(iv) *(Positività)* Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0, \\ &\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \text{se e soltanto se} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dalle definizioni. Il punto *(i)* segue da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = y_1 x_1 + \ldots + y_n x_n = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

Il punto *(ii)* segue da

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= x_1(y_1 + z_1) + \ldots + x_n(y_n + z_n) = \\ &= x_1 y_1 + x_1 z_1 + \ldots + x_n y_n + x_n z_n = \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Confrontando le quantità

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) &= \lambda(x_1y_1+\ldots+x_ny_n) = \lambda x_1y_1+\ldots+\lambda x_ny_n,\\
(\lambda\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} &= (\lambda x_1)y_1+\ldots+(\lambda x_n)y_n = \lambda x_1y_1+\ldots+\lambda x_ny_n,\\
\mathbf{x}\cdot(\lambda\mathbf{y}) &= x_1(\lambda y_1)+\ldots+x_n(\lambda y_n) = \lambda x_1y_1+\ldots+\lambda x_ny_n,
\end{aligned}$$

otteniamo *(iii)*. Per dimostrare *(iv)*, osserviamo che

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = x_1^2+\ldots+x_n^2.$$

Poiché i quadrati di numeri reali sono sempre non negativi, si ha che $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\geq 0$. Se $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, chiaramente $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0$. Viceversa, se per un vettore $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ vale $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0$, allora $x_1^2+\ldots+x_n^2=0$. Ciò è possibile solo se $x_1=\ldots=x_n=0$.

Mediante il prodotto scalare definiamo in $\mathbf{R}^n$ nozioni di lunghezza, distanza, ortogonalità e angolo.

Definizione. La norma o lunghezza $\|\mathbf{x}\|$ di un vettore $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ è definita da

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}.$$

Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, questo fatto è precisamente l'enunciato del Teorema di Pitagora.

Definizione. La distanza fra i punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^n$ è definita da

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

In particolare, $\|\mathbf{x}\|$ coincide con la distanza di $\mathbf{x}$ dall'origine.

• La norma gode delle seguenti proprietà:

(i) *(Omogeneità)* $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$, per ogni $\lambda\in\mathbf{R}$.

(ii) *(Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)* $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\leq\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, per ogni $\mathbf{x},\ \mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$.

(iii) *(Disuguaglianza triangolare)* $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$, per ogni $\mathbf{x},\ \mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$.

Dimostrazione. Il punto (i) segue da

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = \sqrt{\lambda^2x_1^2+\ldots+\lambda^2x_n^2} = |\lambda|\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2} = |\lambda|\|\mathbf{x}\|.$$

(ii) Se $\mathbf{x}=0$ oppure $\mathbf{y}=0$ la disuguaglianza è chiaramente soddisfatta. Supponiamo adesso $\mathbf{x}\neq 0$ e $\mathbf{y}\neq 0$. Consideriamo un vettore della forma $\mathbf{z}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}$, per $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. Per le proprietà (i)(ii)(iii)(iv) del prodotto scalare, abbiamo che

$$\mathbf{z}\cdot\mathbf{z} = \alpha^2\|\mathbf{x}\|^2+\beta^2\|\mathbf{y}\|^2+2\alpha\beta\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\geq 0, \qquad \forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}.$$

In particolare, per $\alpha=\|\mathbf{y}\|^2$ e $\beta=-\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, troviamo

$$\|\mathbf{y}\|^4\|\mathbf{x}\|^2-2\|\mathbf{y}\|^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2+\|\mathbf{y}\|^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 = \|\mathbf{y}\|^4\|\mathbf{x}\|^2-\|\mathbf{y}\|^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2\geq 0.$$

Dividendo per $\|\mathbf{y}\|^2\neq 0$, otteniamo

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2\leq\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2$$

che è equivalente alla disuguaglianza cercata.

(iii) La disuguaglianza triangolare è equivalente alla disuguaglianza

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \leq (\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2.$$

Direttamente dalle definizioni e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2,$$

come richiesto.
Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, la disuguaglianza triangolare dice appunto che nel triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, la lunghezza del lato $\overline{\mathbf{0}(\mathbf{x}+\mathbf{y})}$ è minore o uguale alla somma delle lunghezze dei lati $\overline{\mathbf{0x}}$ e $\overline{\mathbf{x}(\mathbf{x}+\mathbf{y})}$.

Definizione. Due vettori $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$ si dicono *ortogonali* se $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$. Questo si indica con $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$.

Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, l'ortogonalità fra due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è caratterizzata dalla relazione

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{x},-\mathbf{y}).$$

Tale relazione è equivalente a

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \quad\Leftrightarrow\quad \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2-2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0.$$

• A partire dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz possiamo definire una nozione di angolo fra vettori non nulli in $\mathbf{R}^n$. Da essa segue infatti che dati $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ e $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$,

$$-1 \leq \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \leq 1,$$

per cui esiste un unico angolo $\theta\in[0,\pi]$ tale che

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}. \tag{1}$$

Definizione. Definiamo $\theta=\cos^{-1}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\in[0,\pi]$ come l'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$.

In particolare, due vettori non nulli $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ risultano ortogonali se e solo se l'angolo fra essi è $\theta=\pi/2$.

• Dall'equazione (1), otteniamo la seguente relazione fra il prodotto scalare fra due vettori e le loro norme

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta.$$

Osservazione. Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, la stessa relazione si può ottenere applicando la regola del coseno al triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, i cui lati hanno lunghezze $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. Ne segue che

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2-2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi.$$

Dalla definizione stessa della norma abbiamo $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$ e quindi $-2x_1y_1 - 2x_2y_2 = -2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = -2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$ come richiesto.

• La *proiezione ortogonale* $\pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ di un vettore $\mathbf{x}$ su un vettore $\mathbf{y} \neq 0$ è un vettore $\pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) = c\mathbf{y}$ multiplo di $\mathbf{y}$ caratterizzato dalla proprietà

$$(\mathbf{x} - \pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{y} = 0.$$

In altre parole, la proiezione ortogonale di un vettore $\mathbf{x}$ su un vettore $\mathbf{y} \neq 0$ determina una scomposizione del vettore $\mathbf{x}$ nella somma di un vettore parallelo a $\mathbf{y}$ e un vettore ortogonale a $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{z} = \mathbf{x} - \pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} \perp \mathbf{y}. \tag{2}$$

Risulta

$$\pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|\cos\theta\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|\|\mathbf{y}\|}\mathbf{y}.$$

Basi ortonormali. Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

Definizione. Un sottoinsieme $\{X_1, \ldots, X_k\}$ di $\mathbf{R}^n$ si dice un insieme ortogonale se i suoi elementi sono a due a due ortogonali fra loro.

Esercizio. Gli elementi di un insieme ortogonale sono linearmente indipendenti.

Definizione. Una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ è una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ i cui elementi hanno norma uno e sono a due a due ortogonali:

$$\|\mathbf{e}_1\| = \ldots = \|\mathbf{e}_n\| = 1, \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0,\ i \neq j.$$

Esempio. I vettori $\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\}$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$.

Esempio. I vettori $\{\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

Esempio. La base canonica di $\mathbf{R}^n$

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

è una base ortonormale.

Il metodo di *ortonormalizzazione di Gram-Schmidt* permette di ottenere una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ a partire da una base qualsiasi.

Sia $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base di $\mathbf{R}^n$. Allora i vettori

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 \\
\vdots &= \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\mathbf{u}_n &= \mathbf{v}_n - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \dots - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_{n-1}}{\mathbf{u}_{n-1} \cdot \mathbf{u}_{n-1}}\mathbf{u}_{n-1}
\end{aligned}$$

sono a due a due ortogonali (cfr. equazione (2)). Inoltre, poiché per ogni $1 \leq j \leq n$,

$$\mathit{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j\} = \mathit{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j\}, \tag{3}$$

anche i vettori $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ formano una base di $\mathbf{R}^n$. Infine i vettori

$$\{\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \dots, \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{u}_n}{\|\mathbf{u}_n\|}\}$$

formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$.

Esempio. Sia data la base $\{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbf{R}^3$. Allora i vettori

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{u}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{u}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

formano una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$ e i vettori

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

Osservazione. Sia $U \subset \mathbf{R}^n$ un sottospazio e sia $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ una base di U. Dalla relazione (3) segue che, applicando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$, otteniamo una base ortonormale di U.

• Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base *ortogonale* di $\mathbf{R}^n$ e sia $X \in \mathbf{R}^n$. Allora le coordinate di X in $\mathcal{B}$ sono date da

$$x_1 = \frac{X \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}, \dots, x_n = \frac{X \cdot \mathbf{v}_n}{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n}.$$

In particolare, se la base $\mathcal{B}$ è *ortonormale*,

$$x_1 = X \cdot \mathbf{v}_1, \ldots, x_n = X \cdot \mathbf{v}_n.$$

Dimostrazione. Il vettore X si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$

$$X = x_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + x_n \mathbf{v}_n.$$

Per $1 \leq j \leq n$,

$$\mathbf{v}_j \cdot X = \mathbf{v}_j \cdot x_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_j \cdot x_n \mathbf{v}_n = x_j \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j,$$

da cui

$$x_j = \frac{X \cdot \mathbf{v}_j}{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j}.$$