3. Isometrie di $\mathbf{R}^2$.

In questo paragrafo studiamo le isometrie del piano $\mathbf{R}^2$. Ricordiamo che le isometrie sono delle trasformazioni che conservano le distanze fra coppie di punti, ossia delle applicazioni bigettive

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad \text{tali che} \quad d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Iniziamo con l'introdurre alcune isometrie di particolare significato geometrico.

Definizione. Sia $\mathbf{p}$ un vettore di $\mathbf{R}^2$. La *traslazione* $T_\mathbf{p}$ di passo $\mathbf{p}$ è l'applicazione $T_\mathbf{p} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ data da

$$T_\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}.$$

In coordinate,

$$T_\mathbf{p}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix}.$$

Fig.1 La traslazione $T_\mathbf{p}$.

Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

Proposizione 3.1.
(i) Siano $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^2$. *Allora* $T_\mathbf{p} \circ T_\mathbf{q} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = T_\mathbf{q} \circ T_\mathbf{p}$. *In particolare, la composizione di due traslazioni è ancora una traslazione.*
(ii) La traslazione $T_\mathbf{0}$ *è l'applicazione identica.*
(iii) La traslazione $T_{-\mathbf{p}}$ *è l'inversa di* $T_\mathbf{p}$.

Dimostrazione. *(i)* Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, vale

$$T_\mathbf{p} \circ T_\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (T_\mathbf{p}(T_\mathbf{q}(\mathbf{x})) = T_\mathbf{p}(\mathbf{x} + \mathbf{q}) = \mathbf{x} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(\mathbf{x}).$$

D'altra parte, per la commutatività della somma fra vettori, vale anche

$$\mathbf{x} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{x} + \mathbf{q} + \mathbf{p} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_\mathbf{q} \circ T_\mathbf{p}(\mathbf{x}).$$

(ii) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, si ha che

$$T_\mathbf{0}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x},$$

ossia $T_\mathbf{0}$ è proprio l'applicazione identità di $\mathbf{R}^2$.
(iii) Dal punto (i) segue che

$$T_\mathbf{p} \circ T_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_{-\mathbf{p}} \circ T_\mathbf{p}(\mathbf{x}) = T_\mathbf{0}(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

cioè $T_\mathbf{p}$ e $T_{-\mathbf{p}}$ sono una l'inversa dell'altra.

Introduciamo adesso la famiglia delle *rotazioni*.

Definizione. Sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Indichiamo con $R_\varphi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione che ad un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ associa il vettore ottenuto da $\mathbf{x}$ dopo la rotazione di un angolo φ intorno all'origine. Se $\varphi > 0$, la rotazione va intesa in senso "antiorario". Se $\varphi < 0$, la rotazione va intesa in senso opposto, cioè in senso "orario".

Fig.2 La rotazione R_φ.

Teorema 3.2. *Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ e sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Le coordinate del punto $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$ sono date da*

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos\varphi x_1 - \operatorname{sen}\varphi x_2, \\ y_2 &= \operatorname{sen}\varphi x_1 + \cos\varphi x_2. \end{aligned}$$

In notazione matriciale,

$$R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia α l'angolo fra il vettore $\mathbf{x}$ e l'asse delle ascisse. Allora si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos\alpha, \\ x_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}$$

Il vettore $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$ forma un angolo $\varphi + \alpha$ con l'asse delle ascisse e quindi

$$\begin{aligned} y_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos(\varphi + \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos\varphi \cos\alpha - \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\alpha, \\ y_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(\varphi + \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos\varphi \operatorname{sen}\alpha + \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\varphi \cos\alpha. \end{aligned}$$

La sostituzione $x_1 = \|\mathbf{x}\| \cos\alpha$ e $x_2 = \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\alpha$ conclude la dimostrazione.

Esempio. Per esempio, la rotazione $R_{\pi/4}$ di centro $\mathbf{0}$ e di angolo $\varphi = \pi/4$ è l'applicazione

$$R_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \end{pmatrix}.$$

Le rotazioni godono delle seguenti proprietà.

Proposizione 3.3.

(i) La composizione di due rotazioni R_φ e R_ψ intorno all'origine è una rotazione di angolo $\varphi + \psi$:

$$R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi} = R_\psi \circ R_\varphi.$$

(ii) La rotazione di un angolo $\varphi = 0$ è l'applicazione identica, ossia $R_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$.

(iii) La rotazione inversa di R_φ è $R_{-\varphi}$.

Dimostrazione. Tutte queste proprietà sono geometricamente evidenti, ma si possono anche ottenere dalle formule del Teorema 3.2.

Introduciamo infine le *riflessioni.*

Definizione. Sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Indichiamo con $S_\varphi\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione che ad un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ associa il vettore ottenuto da $\mathbf{x}$ dopo la riflessione rispetto alla retta che passa per $\mathbf{0}$ e forma un angolo φ con l'asse delle ascisse.

Fig.3 La riflessione S_φ.

Teorema 3.4. *Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ e sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Le coordinate del punto $\mathbf{y} = S_\varphi(\mathbf{x})$ sono date da*

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos(2\varphi)x_1 + \operatorname{sen}(2\varphi)x_2, \\ y_2 &= \operatorname{sen}(2\varphi)x_1 - \cos(2\varphi)x_2. \end{aligned}$$

In notazione matriciale,

$$S_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \operatorname{sen}(2\varphi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia α l'angolo fra il vettore $\mathbf{x}$ e l'asse delle ascisse. Allora si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos\alpha, \\ x_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}$$

Si vede dalla Fig.?? che il vettore $\mathbf{y} = S_\varphi(\mathbf{x})$ forma un angolo $2\varphi - \alpha$ con l'asse delle ascisse e quindi

$$\begin{aligned} y_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi - \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi)\cos\alpha + \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(2\varphi)\operatorname{sen}\alpha, \\ y_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(2\varphi - \alpha) = -\|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi)\operatorname{sen}\alpha + \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(2\varphi)\cos\alpha. \end{aligned}$$

La sostituizione $x_1 = \|\mathbf{x}\| \cos\alpha$ e $x_2 = \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\alpha$ conclude la dimostrazione.

Esempio. Per esempio, la retta l data da $x_1 = x_2$ forma un angolo di $\pi/4$ con l'asse delle ascisse. La riflessione rispetto ad l è l'applicazione $S_{\pi/4}$ data dalle formule

$$S_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione 3.5.
(i) La composizione $S_\varphi \circ S_\varphi$ è l'applicazione identica.
(ii) La composizione $S_\varphi \circ S_\psi$ di due riflessioni rispetto a rette distinte passanti per $\mathbf{0}$ (con $\varphi \neq \psi$) è una rotazione di angolo $2(\varphi - \psi)$.

Dimostrazione. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
(S_\varphi \circ S_\psi)(\mathbf{x}) &= \left(\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \operatorname{sen}(2\varphi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\psi) & \operatorname{sen}(2\psi) \\ \operatorname{sen}(2\psi) & -\cos(2\psi) \end{pmatrix} \right) (\mathbf{x}) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2\varphi)\cos(2\psi) + \operatorname{sen}(2\varphi)\operatorname{sen}(2\psi) & \cos(2\varphi)\operatorname{sen}(2\psi) - \operatorname{sen}(2\varphi)\cos(2\psi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi)\cos(2\psi) - \cos(2\varphi)\operatorname{sen}(2\psi) & \operatorname{sen}(2\varphi)\operatorname{sen}(2\psi) + \cos(2\varphi)\cos(2\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2(\varphi - \psi)) & -\operatorname{sen}(2(\varphi - \psi)) \\ \operatorname{sen}(2(\varphi - \psi)) & \cos(2(\varphi - \psi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= R_{2(\varphi-\psi)}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

In particolare, se $\varphi = \psi + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ otteniamo l'applicazione identità.

Osservazione. Dalle formule del teorema precedente si vede anche che, in generale,

$$S_\varphi \circ S_\psi \neq S_\psi \circ S_\varphi.$$

Osservazione. Se $\varphi = 0$, l'applicazione S_0 è una riflessione rispetto all'asse delle ascisse; se $\varphi = \pi/2$, l'applicazione $S_{\pi/2}$ è una riflessione rispetto all'asse delle ordinate.

Fig.4 La riflessione rispetto all'asse delle ascisse S_0.

La composizione delle riflessioni S_0 ed $S_{\pi/2}$ è una rotazione di angolo π, ossia la riflessione rispetto all'origine $\mathbf{0}$.

Fig.5 La riflessione rispetto all'origine $R_\pi = S_0 \circ S_{\pi/2}$.

Esempio 3.6. Come ottenere le formule di una rotazione $R_{\varphi,\mathbf{p}}$ di angolo φ intorno ad un punto $\mathbf{p}$ diverso dall'origine? Un modo di procedere è il seguente: prima si fa una traslazione $T_{-\mathbf{p}}$ di passo $-\mathbf{p}$, che porti il punto $\mathbf{p}$ in $\mathbf{0}$; poi si fa una rotazione R_φ intorno a $\mathbf{0}$ e poi si fa una traslazione $T_\mathbf{p}$ che riporti $\mathbf{0}$ in $\mathbf{p}$:

$$R_{\varphi,\mathbf{p}} = T_\mathbf{p} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}.$$

In coordinate

$$T_{\mathbf{p}} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = T_{\mathbf{p}}(R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix}) = T_{\mathbf{p}}(\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix})$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Esempio. Calcoliamo, ad esempio, le formule della rotazione $R_{\varphi,\mathbf{p}}$ di un angolo φ attorno al punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} R_{\varphi,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) &= T_{\mathbf{p}} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \\ &= T_{\mathbf{p}} \circ R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 4 \end{pmatrix} \\ &= T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} \cos\varphi(x_1 - 5) - \operatorname{sen}\varphi(x_2 - 4) \\ \operatorname{sen}\varphi(x_1 - 5) + \cos\varphi(x_2 - 4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x_1 - 5) - \operatorname{sen}\varphi(x_2 - 4) + 5 \\ \operatorname{sen}\varphi(x_1 - 5) + \cos\varphi(x_2 - 4) + 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esempio 3.7. Come calcolare le formule della riflessione S rispetto ad una retta l che non passa per l'origine? Se la retta l non passa per l'origine, non possiamo usare direttamente le formule del Teorema 3.5, ma possiamo procedere nel seguente modo. Fissiamo un punto arbitrario $\mathbf{p}$ sulla retta l e applichiamo la traslazione $T_{-\mathbf{p}}$. La trasformata della retta l, tramite $T_{-\mathbf{p}}$, è la retta l', parallela ad l e passante per $\mathbf{0}$; applichiamo adesso la riflessione S_φ rispetto ad l', ove φ è l'angolo formato da l' con l'asse delle ascisse. Applichiamo infine la traslazione inversa $T_{\mathbf{p}}$, che "riporta la retta l al suo posto". In totale, la riflessione rispetto ad l è data dalla composizione

$$S = T_{\mathbf{p}} \circ S_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}$$

e non dipende dalla scelta di $\mathbf{p} \in l$. In coordinate

$$T_{\mathbf{p}} \circ S_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = T_{\mathbf{p}}(S_\varphi \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix}) = T_{\mathbf{p}}(\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix})$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Esempio. Calcoliamo ad esempio la riflessione rispetto alla retta l di equazione $x_1 + 1 = 0$. Il punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene ad l e quindi la traslazione $T_{-\mathbf{p}}$ di passo $-\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ porta l nella retta l', ad essa parallela e passante per l'origine. l' è data dall'equazione $x_1 = 0$ e forma un angolo uguale a $\pi/2$ con l'asse delle ascisse. La trasformazione cercata è data dunque dalla composizione

$$S = T_{-\binom{1}{0}} \circ S_{\pi/2} \circ T_{\binom{1}{0}}.$$

In coordinate S risulta

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}) &= T_{-\binom{1}{0}} \circ S_{\pi/2} \circ T_{\binom{1}{0}}(\mathbf{x}) \\ &= T_{-\binom{1}{0}} \circ S_{\pi/2} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= T_{-\binom{1}{0}} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= T_{-\binom{1}{0}} \begin{pmatrix} -x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Osservazione.

• La rotazione R di un angolo ϕ intorno ad un punto è lineare se e soltanto se il punto coincide con l'origine $\mathbf{0}$. Altrimenti, $R_{l,\phi}$ è una applicazione lineare seguita da una traslazione. Allo stesso modo, la riflessione S rispetto ad una retta l è lineare se e soltanto se l passa per l'origine $\mathbf{0}$. Se l non passa per l'origine, la riflessione S è una applicazione lineare seguita da una traslazione.

• Le matrici ortogonali 2×2 sono tutte e sole le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbf{R}.$$

Le prime sono caratterizzate dall'avere determinante uguale a 1, le seconde dall'avere determinante uguale a -1. Questo significa che le rotazioni intorno all'origine e le riflessioni rispetto a rette passanti per l'origine esauriscono tutte le *isometrie lineari* del piano $\mathbf{R}^2$. Per il Corollario 2.6, tutte e sole le isometrie di $\mathbf{R}^2$ sono date dalla composizione di una traslazione con una rotazione intorno all'origine oppure dalla composizione di una traslazione con una riflessione rispetto ad una retta passante per l'origine.

• Una rotazione intorno all'origine è la composizione di due riflessioni (Proposizione 3.5 (ii)).
Si può dimostrare che ogni rotazione intorno ad un punto P è la composizione di due riflessioni rispetto a due rette incidenti in P e che una traslazione T_P è la composizione di due riflessioni rispetto a due rette parallele e ortogonali al vettore P. In generale, vale il seguente teorema.

Teorema. *Ogni isometria del piano è composizione di n riflessioni, con $n \leq 3$.*

Osservazione. Tutte le trasformazioni lineari di $\mathbf{R}^2$ mandano rette in rette. Lo stesso vale per le traslazioni e dunque vale per tutte le isometrie del piano che sono composizioni di trasformazioni lineari e traslazioni.

Concludiamo questo paragrafo introducendo l'orientazione di una coppia di vettori in $\mathbf{R}^2$.

Definizione. *L'orientazione* $\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ di una coppia di vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^2$ è il *segno* del determinante

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

In altre parole

$$\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{cases} +1 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 > 0; \\ 0 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0; \\ -1 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 < 0. \end{cases}$$

Si dice che una coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è orientata *positivamente* se $\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$. Geometricamente, ciò accade se, ruotando il vettore $\mathbf{v}$ in senso antiorario fino a sovrapporlo alla retta passante per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{w}$, allora $\mathbf{v}$ ha la stesso verso di $\mathbf{w}$ (e non quello opposto).

Fig.6 Orientazione.

L'orientazione $\mathrm{Or}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ *cambia* se cambia l'ordine dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Si ha infatti che

$$\mathrm{Or}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -\mathrm{Or}(\mathbf{w},\mathbf{v}).$$

Siano $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Allora si ha che

$$\mathrm{Or}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = +1, \qquad \mathrm{Or}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = -1.$$

Una qualunque rotazione R_φ conserva l'orientazione di ogni coppia di vettori. Si dice anche che le rotazioni conservano l'orientazione del piano. Una riflessione, invece, cambia l'orientazione di ogni coppia di vettori. In generale, un'applicazione lineare f di $\mathbf{R}^2$ conserva l'orientazione se e soltanto se $\det(f) > 0$.