2. Isometrie: generalità.

Consideriamo $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico e la distanza indotta.

Definizione. Un'applicazione $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'isometria se conserva la distanza

$$d(F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Questo equivale a: $\quad \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$

Osservazione.

• Un'isometria è necessariamente iniettiva:
Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tali che $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y})$. Questo equivale a $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = 0$. D'altra parte $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ implica $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0$, da cui $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
In realtà un'isometria è necessariamente bigettiva ed ammette inversa, ossia è una trasformazione di $\mathbb{R}^n$ (cf. Corollario A).

• Le isometrie di $\mathbb{R}^n$ si possono *comporre* tra loro e la composizione di due isometrie è ancora un'isometria:
se f e g sono due isometrie di $\mathbb{R}^n$, allora la composizione $f \circ g$, definita da

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})),$$

è ancora un'applicazione bigettiva da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ e conserva le distanze

$$d((f \circ g)(\mathbf{x}), (f \circ g)(\mathbf{y})) = d(f(g(\mathbf{x})), f(g(\mathbf{y}))) = d(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Nota bene che $f \circ g$ si legge "f *composto* g", a indicare che prima si applica g al vettore $\mathbf{x}$ e poi si applica f al vettore $g(\mathbf{x})$. In generale, $f \circ g$ è diversa dall'applicazione $g \circ f$. Se f è invertibile f^{-1}, l'inversa di f, soddisfa $f^{-1} \circ f = Id$, ossia $f^{-1}(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

• L'inversa di un'isometria è un'isometria: essa infatti è bigettiva e soddisfa

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(f^{-1}(f(\mathbf{x})), f^{-1}(f(\mathbf{y}))).$$

Esempio. Le traslazioni

$$T_{\mathbf{p}}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$$

($\mathbf{p}$ è il *passo* della traslazione $T_{\mathbf{p}}$) sono isometrie. Infatti

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{p} - (\mathbf{y} + \mathbf{p})| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Inoltre l'inversa di una traslazione di passo $\mathbf{p}$ è una traslazione di passo $-\mathbf{p}$

$$T_{\mathbf{p}}^{-1} = T_{-\mathbf{p}}.$$

Lemma 2.1. *Sia $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'isometria con $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Allora*
(i) F conserva la norma: $\|F(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
(i) F conserva il prodotto scalare: $F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. (i) Poiché $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, in particolare per $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ vale $\|F(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$.
(ii) Dalla relazione $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$, otteniamo $\|F(\mathbf{x})\|^2 + \|F(\mathbf{y})\|^2 - 2F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Per l'invarianza della norma, segue che $F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Proposizione 2.2. *Sia $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'isometria. Allora F è lineare se e solo se $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

Dim. Se F è lineare, necessariamente $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Viceversa, supponiamo che $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Dobbiamo dimostrare che $F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$ e che $F(\lambda\mathbf{x}) = \lambda F(\mathbf{x})$, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Poiché F conserva la norma ed il prodotto scalare, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\|F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\|^2 =& \|F(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2 + \|F(\mathbf{x})\|^2 + \|F(\mathbf{y})\|^2 \\
&+ 2F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) - 2F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - 2F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot F(\mathbf{y}) \\
=& \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&+ 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) - 2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \\
=& \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Allo stesso modo

$$\|F(\lambda\mathbf{x}) - \lambda F(\mathbf{x})|^2 = \|F(\lambda\mathbf{x})\|^2 + \|\lambda F(\mathbf{x})\|^2 - 2\lambda\|F(\lambda\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{x})\|^2 = \ldots = 0,$$

e la tesi è dimostrata.

Osservazione 2.3. Sia $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'isometria lineare. Ricordiamo che un'applicazione linearre initettiva di $\mathbb{R}^n$ in sè è necessariamente bigettiva. Inoltre, per il lemma precedente manda basi ortonormali in basi ortonormali. Se M la matrice rappresentativa di F (nella base canonica in dominio e codominio), le colonne di M formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.
Una matrice con questa proprietà si chiama *matrice ortogonale*. Algebricamente è caratterizzata dalla condizione ${}^tM \cdot M = Id$.

Esercizio 2.4. Sia M una matrice ortogonale.
(i) Far vedere che M^{-1} e ${}^tM$ sono matrici ortogonali.
(ii) Far vedere che $\det M = \pm 1$.
(iii) Far vedere che se λ è una autovalore reale di M, allora $\lambda = \pm 1$.
(iv) Far vedere che se $V \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio e $MV = V$, allora anche $MV^\perp = V^\perp$.

Esercizio 2.5.
(i) Far vedere che il prodotto di due matrici ortogonali è una matrice ortogonale.
(ii) Far vedere che

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

sono matrici ortogonali, per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$.

Corollario 2.6. *Le isometrie di* $\mathbb{R}^n$ *sono tutte e sole le applicazioni della forma*

$$F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

dove M *è una matrice ortogonale e* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$*. In altre parole, tutte le isometrie di* $\mathbb{R}^n$ *si ottengono dalla composizione di una traslazione con una isometria lineare.*

Dimostrazione. Sia F un'isometria e sia $F(\mathbf{0}) = \mathbf{b}$. La composizione $T_{-\mathbf{b}} \circ F$ è un'isometria che manda l'origine in sè

$$T_{-\mathbf{b}} \circ F(\mathbf{0}) = T_{-\mathbf{b}}(F(\mathbf{0})) = T_{-\mathbf{b}}(\mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Per la proposizione, $T_{-\mathbf{b}} \circ F$ è un'isometria lineare, per cui esiste una matrice ortogonale M tale che

$$T_{-\mathbf{b}} \circ F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Di conseguenza

$$F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$