1. Sia $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ la proiettività indotta dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Scrivere la formula generale di f in coordinate omogenee.
   (ii) Calcolare $f(2:3)$, $f(1:0)$, $f(0:1)$, $f(1:4)$.
   (iii) Scrivere la formula generale di f^{-1} in coordinate omogenee.
   (iv) Calcolare $f^{-1}(1:1)$, $f^{-1}(1:3)$, $f^{-1}(0:4)$, $f^{-1}(1:0)$.

2. Determinare la proiettività $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ che manda i punti $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ rispettivamente in $(1:0)$, $(2:1)$, $(1:-1)$.

3. Determinare la proiettività $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ che manda i punti $(1:3)$, $(2:-1)$, $(2:1)$ rispettivamente in $(1:0)$, $(0,1)$, $(1:1)$.

4. Determinare la proiettività $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ che manda i punti $(1:3)$, $(2:-1)$, $(2:1)$ rispettivamente in $(1:1)$, $(3:1)$, $(1:5)$. Calcolare $f(1:4)$ ed $f(1:1)$.

5. Siano $l: \; x_0 - x_1 + x_2 = 0$ ed $m: \; x_1 - x_2 = 0$ rette in $\mathbb{P}^2$. Sia $R = (0:1:2) \in \mathbb{P}^2$ e sia $\pi_R: l \longrightarrow m$ la prospettività di centro R. Calcolare $\pi_R(-1:0:1)$.

6. Considerare la proiettività $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ indotta dalla matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare $f(1:0)$ ed $f(0:1)$.
   (ii) Determinare un punto $(x_0:x_1) \in \mathbb{P}^1$ tale che $f((x_0:x_1)) \neq (x_0:x_1)$.

7. Considerare la proiettività $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ indotta dalla matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Determinare i punti fissi di f.

8. Considerare la proiettività $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ indotta dalla matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinare i punti fissi di f.

9. Sia l la retta di equazione $x_0 + x_1 = 0$. Siano $P = (0:1:-1)$, $Q = (1:0:0)$ e $R = (1:-1:1)$ tre punti di $\mathbb{P}^2$.
   (i) Far vedere che i punti $A = (1:-1:0)$, $B = (0:0:1)$ e $C = (-1:1:1)$ stanno su l.
   (ii) Far vedere che i punti P, Q e R stanno su una retta m.
   (iii) Dimostrare che esiste una proiettività $f: l \longrightarrow m$ tale che $f(A) = P$, $f(B) = Q$ e $f(C) = R$.
   (iv) Determinare $f(1:-1:1)$.

10. Sia l una retta in $\mathbb{P}^2$ e sia $\varphi: l \longrightarrow l$ una proiettività.
    (i) Far vedere che se φ fissa tre punti distinti, allora $\varphi(P) = P$ per ogni $P \in l$.
    (ii) Dare esempi di mappe proiettive $\varphi: l \longrightarrow l$ che fissano 0,1, oppure 2 punti (basta dare le matrici corrispondenti).

11. Sia l una retta a siano P, Q e R tre punti distinti su l.
    (i) Far vedere che esiste esattamente una proiettività φ con $\varphi(Q) = R$ e tale che P è il suo *unico* punto fisso.

(ii) Descrivere un procedimento per costruire $\varphi(R)$.

12. Siano l ed m rette in $\mathbb{P}^2$. Siano $A,\ B,\ C\ \in l$ e $P,\ Q,\ R\ \in m$ due terne di punti distinti (disegnati sulle rette in questo ordine, da sinistra verso destra).
    (i) Costruire geometricamente la proiettività $f\colon l \longrightarrow m$, tale che $f(A) = Q$, $f(B) = P$, $f(C) = R$.
    (ii) Costruire geometricamente la proiettività $f\colon l \longrightarrow m$, tale che $f(A) = P$, $f(B) = R$, $f(C) = Q$.

13. Siano $P,\ Q,\ R \in \mathbb{P}^1$ punti distinti. Costruire geometricamente una proiettività $f\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tale che $f(P) = Q$, $f(Q) = R$, $f(R) = P$.

14. Siano $P,\ Q,\ R,\ S \in \mathbb{P}^1$ punti distinti.
    (i) Costruire geometricamente una proiettività $f\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tale che $f(Q) = Q$, $f(P) = R$, $f(R) = P$.
    (ii) Determinare $f(S)$.

15. Sia $T \subset \mathbb{P}^2$ un triangolo di vertici A_1, A_2 e A_3. Siano a_1, a_2 e a_3 i lati di T corrispondenti: $A_i \notin a_i$. Sia P un punto e siano Q_i i punti di intersezione $PA_i \cap a_i$, per $i = 1, 2, 3$. Dimostrare che i tre punti $Q_iQ_j \cap A_iA_j$ stanno su una retta.

16. Sia O un punto di $\mathbb{P}^2$ e siano l, m e n tre rette passanti per O. Siano P e Q due punti e sia $f : l \longrightarrow n$ la prospettività di centro P di l su m seguita dalla prospettività di centro Q di m su n. Dimostrare che f è una prospettività di centro un punto R che sta sulla retta PQ.

17. Siano $A = (1 : 0)$, $B = (1 : 6)$, $C = (1 : 3)$. Calcolare D tale che $(ABCD) = -1$.

18. Siano $A = (1 : 1)$, $B = (1 : 2)$, $C = (1 : 8)$. Calcolare D tale che $(ABCD) = 1$.

19. Far vedere che i punti $A = (1 : 0 : 1)$, $B = (0 : 1 : 1)$, $C = (2 : 1 : 3)$ e $D = (3 : -1 : 2)$ stanno su una retta. Determinare i birapporti $(ABCD)$ e $(BACD)$.

20. Far vedere che i punti $P = (1 : 1 : 1)$, $Q = (2 : 1 : 3)$ e $R = (0 : 1 : -1)$ stanno su una retta l. Trovare il punto $S \in l$ tale che il birapporto $(PQRS)$ sia uguale a 3.

21. Sia r una retta in $\mathbb{P}^2$. Costruire geometricamente una proiettività $f : r \longrightarrow r$ che manda quattro punti distinti A, B, C e D in C, D, A e B (in questo ordine).

22. Scrivere una matrice M che induce una proiettività $f\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ con punti fissi $A = (1 : 1)$ e $B = (1 : -1)$. Calcolare $(ABPf(P))$, dove $P \in \mathbb{P}^1$ è un punto arbitrario.

23. Sia l una retta e sia $\varphi : l \longrightarrow l$ una proiettività. Siano dati: un punto P fisso di φ e punti A, A', B e B' tali che $\varphi(A) = A'$ e $\varphi(B) = B'$. Costruire Q il secondo punto fisso di φ.

24. Sia l una retta e sia $\varphi : l \longrightarrow l$ una proiettività. Supponiamo che per un punto $P \in l$ abbiamo che $\varphi(P) \neq P$ mentre $\varphi^2(P) = P$. Dimostrare che φ è una *involuzione*, cioè che $\varphi^2(Q) = Q$ per ogni $Q \in l$.

25. Sia l una retta in $\mathbb{P}^2$. Far vedere che nessuna involuzione $\varphi : l \longrightarrow l$ ha esattamente 1 punto fisso.

26. Siano P e Q due punti distinti su una retta l. Dimostrare che c'è un'unica involuzione φ che fissa P e Q.