1. Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori delle seguenti matrici simmetriche A. Determinare una matrice ortogonale C tale che $C^{-1}AC$ sia una matrice diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

2. Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori delle seguenti matrici simmetriche A. Determinare una matrice ortogonale C tale che $C^{-1}AC$ sia una matrice diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Determinare una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi le forme quadratiche:
   (i) $q(X,Y,Z) = 2X^2 + 2XY + 2XZ + 2Y^2 + 2YZ + 2Z^2$;
   (ii) $q(X,Y,Z) = X^2 + 4XZ - Y^2 + Z^2$;
   (iii) $q(X,Y,Z) = -2XY + 2Y^2 - 2YZ$.

4. Determinare quali delle seguenti forme quadratiche sono definite (resp. semidefinite) positive, definite (resp. semidefinite) negative o indefinite:
   (i) $q(X,Y) = 3X^2 - 8XY - 3Y^2$;
   (ii) $q(X,Y) = X^2 - 2XY + Y^2$;
   (iii) $q(X,Y) = 6XY$;
   (iv) $q(X,Y,Z) = 2XY + Y^2 - 2XZ$;
   (v) $q(X,Y,Z) = XZ + XY + YZ$;
   (vi) $q(X,Y,Z) = 4X^2 - 9XY + 5Y^2$.