

(1) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare le formule per la traslazione $T_{\mathbf{p}}$.

(ii) Calcolare $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(iii) Calcolare $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(iv) Calcolare $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(2) Sia A la matrice 3×3 data da

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che A è una matrice ortogonale.

(ii) Calcolare autovalori e autospazi di A .

(iii) Interpretare geometricamente l'isometria $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, X \mapsto AX$.

(3) Sia A la matrice 3×3 data da

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che A è una matrice ortogonale.

(ii) Calcolare autovalori e autospazi di A .

(iii) Interpretare geometricamente l'isometria $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, X \mapsto AX$.

(4) Sia C il cubo in \mathbf{R}^3 di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno al vettore \mathbf{e}_3 ?

(ii) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione R_{π} intorno al vettore \mathbf{e}_3 ?

(iii) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione $R_{3\pi/2}$ intorno al vettore \mathbf{e}_3 ?

(5) Sia C il cubo in \mathbf{R}^3 di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a \mathbf{e}_3 .

- (ii) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a \mathbf{e}_1 .
- (iii) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $-\mathbf{e}_1$.
- (iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?

(6) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.

- (i) Trovare le formule per la rotazione $R_{\pi/2, \mathbf{v}}$ di un angolo $\pi/2$ intorno a \mathbf{v} .
- (ii) Trovare le formule per la rotazione $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}$ di un angolo $-\pi/4$ intorno a \mathbf{v} .
- (iii) Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

- Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando $R_{\pi/2, \mathbf{v}}$ a l .
- (iv) Sia π il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica del piano che si ottiene applicando $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}$ a π .

- (7) Sia π il piano di equazione $x_1 + 2x_2 = 0$.
- (i) Calcolare le formule della riflessione rispetto a π .
 - (ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

- (8) Sia C il cubo dell'Eserc.4. Calcolare l'immagine di C dopo la riflessione rispetto
- (i) al piano (x_1, x_2) .
 - (ii) al piano (x_2, x_3) .
 - (iii) al piano di equazione $x_1 = x_2$.
- (9) Sia C il cubo dell'Eserc.5. Calcolare l'immagine di C dopo la riflessione rispetto
- (i) al piano (x_1, x_2) .
 - (ii) al piano (x_2, x_3) .
 - (iii) al piano di equazione $x_1 = x_2$.
 - (iv) Trovare tutte le riflessioni S_π che mandano C in se stesso.

(10) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (i) Calcolare la formula per la riflessione $U_{\mathbf{p}}$ rispetto al punto \mathbf{p} .
- (ii) Calcolare la formula per la riflessione $U_{\mathbf{q}}$ rispetto al punto \mathbf{q} .
- (iii) Calcolare le formule per la trasformazione $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$ e per $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$.
- (iv) Geometricamente, che cosa fanno le trasformazioni $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$ e $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$?

- (11) Sia π il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbf{R}$$

e sia π' il piano di equazione $x_3 = 0$.

- (i) Trovare le formule della riflessione S_π rispetto a π .
- (ii) Calcolare le formule della riflessione $S_{\pi'}$ rispetto a π' .
- (iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S_\pi \circ S_{\pi'}.$$

- (iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S_{\pi'} \circ S_\pi.$$