1. Sia $S(u,v) = P + uA + vB$ in $\mathbf{R}^3$ un piano in $\mathbf{R}^3$.
   (a) Verificare che A e B possono essere scelti in modo che la prima forma fondamentale di S sia identicamente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Verificare che per ogni A, B, la seconda forma fondamentale di S è identicamente nulla.
   (c) Verificare che se una superficie $T(u,v)$ ha la seconda forma fondamentale identicamente nulla, allora è localmente isometrica ad una porzione di piano.

2. (cf. Esercizio 10, Sett. 4& 5) Sia $S(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma_1(u) \\ \gamma_2(u) \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ il cilindro retto sulla curva piana γ.
   (a) Calcolare la seconda forma fondamentale di S e confrontarla con quella di un piano in $\mathbf{R}^3$. Quando è che la seconda forma fondamentale di S coincide con quella di un piano?
   (b) Determinare le curvature principali al variare di un punto su S.
   (c) Determinare le linee di curvatura su S.

3. (cf. Esercizio 5, da Eserc. Vari 9) Siano date le superfici

$$\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} \sinh v \cos u \\ \sinh v \sin u \\ u \end{pmatrix} \quad (\textit{elicoide}) \quad \text{e} \quad \mathbf{T}(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v \cos u \\ \cosh v \sin u \\ v \end{pmatrix} \quad (\textit{catenoide}).$$

   (a) Verificare che hanno la stessa prima forma fondamentale e la stessa curvatura di Gauss.
   (b) Verificare che non hanno la stessa seconda forma fondamentale.
   (c) Guardare il filmetto che porta l'elicoide sul catenoide, senza alterare angoli e lunghezze *sulle superfici*. Osservare che ciò non avviene mediante movimenti rigidi dello spazio!
   (d) Determinare le linee di curvatura sul catenoide e le curvature principali al variare di un punto su T.

4. Verificare che la curvatura normale di una qualunque curva su una sfera di raggio R è uguale a $\pm 1/R$ (a seconda della parametrizzazione).

5. (cf. Esercizio 5, Sett. 4& 5) Disegnare il toro e indicare nella figura i punti ellittici e i punti iperbolici. Verificare il risultato con i calcoli. Determinare i punti parabolici.

6. Sia S la superficie di rotazione ottenuta ruotando la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \\ t \end{pmatrix}$, con $f(t) > 0$, intorno all'asse x_3.
   (a) Caratterizzare i punti iperbolici, ellittici e parabolici di S in base alle proprietà di f.
   (b) Eseguire i calcoli nel caso di $f(t) = t^3 - 3t + 5$, per $t \in [-2, 2]$ e confrontare.

7. Verificare che la seconda forma fondamentale di una superficie non cambia applicando un movimento rigido di $\mathbf{R}^3$.

9. Giustificare perché le superfici $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (sfera), $x^2 + y^2 = R^2$ (cilindro) e $z = x^2 - y^2$ (sella) non sono localmente isometriche.

10. Date la superfici $\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ u \end{pmatrix}$ (*elicoide*) e $\mathbf{T}(u,v) = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ \log v \end{pmatrix}$ (*imbuto*), verificare che hanno la stessa curvatura di Gauss, ma non la stessa prima forma fondamentale.

11. Sia $S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$ il paraboloide ellittico.
   (a) Determinare le linee di curvatura su S. (osservare che S è una superficie di rotazione....)
   (b) Dare una parametrizzazione di tali curve nella forma $S(u(t), v(t))$.