1. Siano date $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \\ t^9 \end{pmatrix}$, $\sigma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ e $\tau(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \\ t^6 \end{pmatrix}$ per $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Determinare se γ, σ e τ definiscono curve parametrizzate regolari.
   (b) Determinare se le traiettorie di γ, σ e τ coincidono.

2. Sia data $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, per $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Determinare se γ definisce una curva parametrizzata regolare.
   (b) Esiste una parametrizzazione regolare della traiettoria di γ?

3. Sia data $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, per $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Disegnare la traiettoria di γ.
   (b) Determinare una parametrizzazione di γ rispetto alla lunghezza d'arco.

4. Sia data la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\cos t, \\ 1 - \sin t \\ -\frac{3}{5}\cos t \end{pmatrix}$, per $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Verificare che γ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.
   (b) Verificare che γ è una curva piana e determinare il piano su cui giace.
   (c) Verificare che γ è una circonferenza. Determinarne centro e raggio.

5. Sia data $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1+t)^{3/2} \\ \frac{1}{3}(1-t)^{3/2} \\ \frac{t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
   (a) Per quali valori del parametro γ definisce una curva parametrizzata regolare?
   (b) Verificare che γ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.
   (c) Verificare che γ soddisfa le equazioni di Frenet.

6. Sia data la circonferenza $\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. Sia $S(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la riflessione rispetto all'asse x_2.
   (a) Determinare $S(\gamma)$, l'immagine di γ tramite S.
   (b) Verificare che γ e $S(\gamma)$ sono percorse in senso opposto.
   (c) Calcolare e confrontare la curvatura con segno di γ e di $S(\gamma)$.

7. Sia data una curva piana $\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \end{pmatrix}$, dove per semplicità s è il parametro lunghezza d'arco. Sia $F(X) = AX + b$ una isometria di $\mathbf{R}^2$. Nei casi in cui $\det A = 1$ e $\det A = -1$:
   (a) Calcolare e confrontare la curvatura di γ e di $F(\gamma)$.
   (b) Calcolare e confrontare la curvatura con segno di γ e di $F(\gamma)$.

8. Sia data una curva dello spazio $\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_1(s) \\ \gamma_3(s) \end{pmatrix}$, dove per semplicità s è il parametro lunghezza d'arco. Sia $F(X) = AX + b$ una isometria di $\mathbf{R}^3$.
   (a) Verificare che γ e $F(\gamma)$ hanno la stessa curvatura.
   (b) Verificare che γ e $F(\gamma)$ hanno la stessa torsione se $\det A = 1$ e torsione opposta se $\det A = -1$.

9. Sia $\gamma = \gamma(t)$ una curva regolare del piano.

(a) Dimostrare che la curvatura con segno $\kappa_s(t)$ è una funzione differenziabile.
(b) Dimostrare che se la curvatura $\kappa(t)$ è sempre strettamente positiva, allora è anche una funzione differenziabile.
(c) Verificare che la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$ è una curva regolare del piano la cui curvatura non è una funzione differenziabile.

10. Sia $\gamma = \gamma(t)$ una curva regolare dello spazio.
(a) Dimostrare che la torsione $\tau(t)$ è una funzione differenziabile dovunque è ben definita.

11. Determinare una curva del piano con curvatura costante $\kappa(t) \equiv \frac{1}{4}$, $t \in I$.
(a) Quante ce ne sono?
(b) Quante ce ne sono che passano per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ at tempo $t_0 \in I$?
(c) Quante ce ne sono che passano per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ at tempo t_0, con versore tangente e versore normale dati da $\{\mathbf{t}(t_0), \mathbf{n}(t_0)\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$?

12. Determinare una curva del piano con curvatura con segno costante $\kappa_s(s) \equiv \frac{1}{4}$.
(a) Quante ce ne sono?
(b) Quante ce ne sono che passano per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ at tempo t_0?
(c) Quante ce ne sono che passano per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ at tempo t_0, con "coppia" di Frenet $\{\mathbf{t}(t_0), \mathbf{n_s}(t_0)\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$?

13. Determinare curvatura e torsione dell'elica cilindrica

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}, \quad a > 0,\ b \in \mathbf{R}.$$

14. Determinare una curva dello spazio $\gamma = \gamma(t),\ t \in I$ con curvatura costante $\kappa(t) \equiv 5$ e torsione costante $\tau(s) \equiv 2$.
(a) Quante ce ne sono?
(b) Quante ce ne sono che passano per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ at tempo t_0?
(c) Quante ce ne sono che passano per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ at tempo t_0, con "terna" di Frenet $\{\mathbf{t}(t_0), \mathbf{n}(t_0), \mathbf{b}(t_0)\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$?

15. Data la spirale logaritmica $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$, verificare che $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$ formano un angolo costante $\theta = \pi/4$ al variare di t.

16. Sia $\gamma = \gamma(s)$ una curva piana parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, con la proprietà che $\gamma(s)$ e $\gamma'(s)$ formano un angolo costante θ.

(a) Verificare che se $\theta = 0$, allora γ è un segmento di retta.
(b) Verificare che se $\theta = \pi/2$, allora γ è un arco di circonferenza.
(c) Verificare che se $0 < \theta < \pi/2$, allora γ è un arco di spirale logaritmica $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{at}\cos t \\ e^{at}\sin t \end{pmatrix}$, per qualche $a \neq 0$.

17. (*Evoluta*) Sia $\gamma = \gamma(s)$ una curva piana parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Sia $\epsilon(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa_s(s)}\mathbf{n_s}(s)$ la curva descritta dai centri dei cerchi osculatori a γ. Supponiamo che la derivata della curvatura con segno sia positiva $\kappa_s'(s) > 0$.
(a) Determinare la funzione lunghezza d'arco per ϵ.
(b) Calcolare la curvatura con segno di ϵ.

18. Sia data l'ellisse $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, di semiassi $a > b > 0$.
(a) Verificare che $\gamma'(t)$ e $\gamma''(t)$ non sono ortogonali fra loro per $t \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.
(b) Calcolare il versore tangente e il versore normale a $\gamma(t)$, al variare di t.
(c) Determinare e disegnare l'*evoluta* di γ, ossia la curva descritta dai centri dei cerchi osculatori a γ al variare di t.
(d) Chi è l'*evoluta* di γ quando $a = b$?