1. Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio 2 in $\mathbf{R}^2$.
   (a) Determinare l'equazione di $S(\mathcal{C})$, dove S è la riflessione rispetto alla retta verticale $x_1 = 2$.
   (b) Determinare l'equazione di $S(\mathcal{C})$, dove S è la riflessione rispetto alla retta $x_1 = x_2$.

2. Siano dati i punti $F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$ e sia $E = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\mathbf{x} - F_1\| + \|\mathbf{x} - F_2\| = 4\}$ un'ellisse di fuochi F_1 ed F_2. Sia $T_\mathbf{p}$ la traslazione di passo $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Sia R_θ la rotazione di angolo $\theta = \pi/4$ intorno all'origine.
   (a) Determinare i fuochi dell'ellisse $T_\mathbf{p}(E)$.
   (b) Determinare l'equazione dell'ellisse $R_\theta(E)$ (impostare l'equazione, senza completare il calcolo).

3. Per ognuna delle matrici simmetriche in (1) determinare gli autovalori ed una base ortonormale di autovettori:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

4. Per ognuna delle matrici simmetriche in (1) scrivere la forma quadratica associata, determinarne una forma canonica metrica, e scrivere il cambiamento di coordinate isometrico che la porta in tale forma.

5. Per ognuna delle forme quadratiche del punto precedente, determinare massimo e minimo sulla sfera unitaria S. Determinare i vettori di S su cui tali valori sono assunti.

6. Sia A una matrice simmetrica. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita da $\langle X, Y \rangle := {}^t X A Y$, per $X, Y \in \mathbf{R}^n$. Verificare che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ha le seguenti proprietà:
   (a) È bilineare (ossia è lineare in ognuna delle variabli X e Y);
   (b) È simmetrica (ossia $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$, per ogni X, Y);
   (c) È definita positiva (ossia $\langle X, X \rangle > 0$, per ogni $X \neq 0$) se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi.
   (d) Verificare che se A è la matrice identità di ordine n, l'applicazione $\langle X, Y \rangle$ non è altro che il prodotto scalare canonico su $\mathbf{R}^n$.

7. Sia dato un piano $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ in $\mathbf{R}^3$ munito del prodotto scalare canonico. Siano $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{w} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2$ generici vettori di V.
   (a) Verificare che al variare di $\mathbf{v} \in V$, il quadrato della norma $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ definisce una forma quadratica nelle variabili (α_1, α_2) la cui matrice simmetrica associata è data da $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$.
   (b) Possiamo affermare che la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ ha autovalori strettamente positivi?
   (c) Verificare che al variare di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, il prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ coincide con l'espressione
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

8. Siano dati i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$ e sia $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.
   (a) Determinare la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$.
   (b) Sia $\mathbf{v}$ il vettore di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in V$. Determinare le coordinate di $\mathbf{v}$ in $\mathbf{R}^3$.
   (c) Verificare che la norma di $\mathbf{v}$ in $\mathbf{R}^3$ coincide con l'espressione
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$