COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Ogni esercizio vale 6 punti. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI.

4. *Determinare tutti i numeri complessi z tali che i^z assume solo valori puramente immaginari.*

Sol.: Sia $z = x + iy$. Abbiamo

$$i^z = e^{z \log i} = \{e^{z(\log |i| + i(\pi/2+2\pi k))},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{-y(\pi/2+2\pi k)} e^{i(\pi/2+2\pi k)x},\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Il fattore $e^{-y(\pi/2+2\pi k)}$ è reale, per ogni $y \in \mathbb{R}$ ed ogni $k \in \mathbb{Z}$. Il fattore

$$e^{i(\pi/2+2\pi k)x} = \cos(\pi/2 + 2\pi k)x + i \sin(\pi/2 + 2\pi k)x$$

è puramente immaginario se e solo se

$$(\pi/2 + 2\pi k)x \equiv \pi/2 \bmod \pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi/2 + \pi h}{\pi/2 + 2\pi k}, \quad h, k \in \mathbb{Z}.$$

Conclusione: i numeri complessi che soddisfano le condizioni richieste sono

$$\{z = x + iy \mid x = \frac{\pi/2 + \pi h}{\pi/2 + 2\pi k} = \frac{1 + 2h}{1 + 4k}, \quad h, k \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

5. *Determinare se il seguente enunciato è vero o falso giustificando bene la risposta (dimostrarlo se è vero, esibire un controesempio se è falso):*
Sia f una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Supponiamo che esistano due costanti $M, r \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui vale $|f(z)| < M$, per $|z| > r$. Allora f è costante.

Sol.: Se esistono due costanti $M, r \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui vale $|f(z)| < M$, per $|z| > r$, significa che la funzione è limitata, e quindi olomorfa, in un intorno del punto all'infinito. Questo non implica che sia costante, ma soltanto che lo sviluppo di Laurent di f centrato in $z = 0$ non ha potenze positive di z. Funzioni non costanti che soddisfano le condizioni date sono ad esempio

$$f(z) = \frac{1}{z}, \qquad g(z) = e^{1/z} = \sum_{n \leq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

che hanno rispettivamente un polo e una singolarità essenziale in $z = 0$.

6. *Sia $\gamma = \{z = 2e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$. Calcolare l'integrale*

$$I = \int_\gamma \frac{5z^4 - 1}{z^5 - z - 1} dz.$$

Sol.: La funzione $f(z) = z^5 - z - 1$ è olomorfa su $\mathbb{C}$ e $5z^4 - 1$ è la sua derivata. Ne segue che $I = 2\pi i \# Z(f)$, dove $\# Z(f)$ indica il numero di zeri di f all'interno del disco di centro zero e raggio 2, contati con la loro molteplicità. Per ottenere $\# Z(f)$ applichiamo il teorema di Rouché ad $f(z) = z^5 - z - 1$ e $g(z) = z^5$. Per $|z| = 2$ vale la disuguaglianza

$$|f(z) - g(z)| = |z + 1| \leq 3 < 2^5 = |z^5| = |g(z)|.$$

Dunque f e g hanno entrambe 5 zeri all'interno del disco di centro zero e raggio 2.
Conclusione: $I = 10\pi i$.