*COGNOME* .................................. *NOME* ................................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Ogni esercizio vale 6 punti. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI.

4. *(a) Sia $f$ una funzione non costante, olomorfa in un intorno del disco unità $\Delta$. Se $|f(z)| > 2$ per $|z| = 1$, e $f(0) = 1$, allora $f$ ha almeno uno zero in $\Delta$.*
   *(b) Si dimostri il seguente enunciato o se ne dia un controesempio.*
   *Sia $f$ una funzione olomorfa in un intorno di $\Delta$, e mai nulla al suo interno. Allora esiste $z_0 \in \partial\Delta$, tale che $|f(z)| \geq |f(z_0)|$, per ogni $z \in \Delta$.*

*Sol.*: (a) La funzione continua $|f|$ ha massimo e minimo sul compatto $\overline{\Delta}$. Poiché $|f(z)| > 2$, per $|z| = 1$, ed $f(0) = 1$, il minimo di $|f|$ è assunto all'interno del disco $\Delta$. Per il principio del minimo, tale minimo è assunto sugli zeri di $|f|$. Conclusione: $f$ ha almeno uno zero in $\Delta$.

(b) L'enunciato è vero. Se $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Delta$, allora necessariamente il minimo di $|f|$ è assunto sul bordo del disco. Dunque $z_0 \in \partial\Delta$, tale che $|f(z)| \geq |f(z_0)|$, per ogni $z \in \Delta$.
Un esempio di tale situazione è dato dalla funzione $f(z) = z - 1$.

**5)** *Calcolare l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+16} dx$.*

*Sol.*: Osserviamo innanzitutto che l'integrale dato esiste. La funzione $f(z) = \frac{z^2}{z^4+16}$ non ha zeri sull'asse reale ed ha due poli semplici nel semipiano superiore $\alpha = 2e^{i\pi/4}$ e $\beta = 2e^{i3\pi/4}$. Sia $R > 0$ e sia $\gamma_R$ la curva data da $[-R, R] \cup C_R^+$, dove $C_R^+ = \{Re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$, percorsa in senso antiorario. Per $R$ sufficientemente grande la curva $\gamma_R$ racchiude i poli $\alpha$ e $\beta$ e per il teorema dei residui vale

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R^+} f(z)dz = 2\pi i(Res(f(z), \alpha) + Res(f(z), \beta)).$$

Dal calcolo dei residui, abbiamo

$$Res(f(z), \alpha) = \lim_{z \to 2e^{i\pi/4}} (z - 2e^{i\pi/4}) \frac{z^2}{z^4 + 16} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{16},$$

$$Res(f(z), \beta) = \lim_{z \to 2e^{i3\pi/4}} (z - 2e^{i3\pi/4}) \frac{z^2}{z^4 + 16} = \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{16}.$$

Inoltre $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+} f(z)dz = 0$, in quanto per $R \to +\infty$

$$|\int_{C_R^+} f(z)dz| = |\int_0^{\pi} \frac{R^3 e^{i3\theta} i}{R^4 e^{i4\theta} + 16}| \leq \pi sup_{\theta\in[0,\pi]} |\frac{R^3}{R^4 e^{i4\theta} + 16}| \leq \pi \frac{R^3}{R^4 - 16} \to 0.$$

Conclusione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 16} dx = 2\pi i(\frac{\sqrt{2}(1-i)}{16} + \frac{\sqrt{2}(1-i)}{16}) = \sqrt{2}\frac{\pi}{4}.$$

**6)** *Mostrare che gli zeri della funzione olomorfa $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ sono tutti contenuti nell'aperto $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.*

*Sol.*: Per il teorema fondamentale dell'algebra $f$ ha 7 zeri in $\mathbb{C}$. Per localizzarli, applichiamo prima il teorema di Rouché alle funzioni $f(z) - h(z) = -5z^3 + 12$ e $h(z) = z^7$. Per $|z| = 2$, vale la disuguaglianza

$$|f(z) - h(z)| = | - 5z^3 + 12| \leq 5|z|^3 + 12 = 52 < |h(z)| = |z|^7 = 128.$$

Ne segue che $f$ ed $h$ hanno lo stesso numero di zeri all'interno del disco $\Delta(0, 2)$ di centro 0 e raggio 2, cioè 7 zeri.

Adesso applichiamo il teorema di Rouché alle funzioni $f(z) - g(z) = -5z^3 + z^7$ e $g(z) = 12$. Per $|z| = 1$, vale la disuguaglianza

$$|f(z) - g(z)| = | - 5z^3 + 12| \leq 5|z|^3 + |z|^7 = 6 < 12 = |g(z)|.$$

Ne segue che $g$ ed $f$ hanno lo stesso numero di zeri all'interno del disco $\Delta(0, 1)$ di centro 0 e raggio 1, cioè nessuno.

Conclusione: gli zeri della funzione olomorfa $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ sono tutti contenuti nell'aperto $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.