1. Verificare che
$$\int_\gamma \frac{1}{(z-1)(z+1)}dz = \int_\eta \frac{1}{(z-1)(z+1)}dz,$$
dove $\gamma = \{z = 1 + e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$ ed $\eta = \{z = -1 + e^{-i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

2. (a) Sia $\gamma = \{z = e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$. Dare un esempio di una funzione f di classe C^1 ma non olomorfa in un intorno di $\Delta(0, 1)$ tale che
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$
(b) Supponiamo che una funzione f sia continua sul disco $\Delta(0, 1)$ e soddisfi
$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0, \quad \forall\ r, \quad 0 < r < 1,$$
dove $\gamma_r = \{z = re^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$. Possiamo concludere che f è olomorfa su $\Delta(0, 1)$?

3. Determinare il raggio di convergenza della serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} z^{n^2+2n+3}$.

4. Determinare l'espansione in serie della funzione $f(z) = \frac{z^2}{(1-z^2)}$ vicino a 0 e determinarne il raggio di convergenza.

5. Sia $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ un polinomio in $\mathbf{C}[z]$. Mostrare che se $R > 0$ è sufficientemente grande, allora $|p(z)| \geq |a_n|R^n/2$, per ogni z tale che $|z| = R$.

6. Sia $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ una funzione razionale, dove p e q sono polinomi in z. Sia f una funzione olomorfa su $\mathbf{C} \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$, con poli in $\{P_1, \ldots, P_k\}$. Supponiamo che $|f(z)| \leq |R(z)|$, per ogni z su cui sono entrambe ben definite. Mostrare che $f(z) = cR(z)$, per una costante $c \in \mathbf{C}$. In particolare, anche f è una funzione razionale.

7. (a) Sia $f\colon \Delta(P, r) \setminus \{P\} \to \mathbf{C}$ una funzione olomorfa sul disco bucato di centro P e raggio r. Discutere il tipo di singolarità di $1/f$ in P, a seconda del tipo di singolarità di f in P.
(b) Sia $U := f(\Delta(P, r) \setminus \{P\})$ aperto e sia $g\colon U \to \mathbf{C}$ una funzione olomorfa. Discutere il tipo di singolarità di $g \circ f$ in P, a seconda del tipo di singolarità di f in P.

8. Calcolare i primi 4 termini della serie di Laurent centrata in 0 delle seguenti funzioni
$$\frac{e^{1/z}}{z^3}, \qquad \frac{e^z}{z^3}, \qquad 1/\sin z, \qquad \frac{(z-1)}{z(z-3)}.$$

9. Esiste una funzione olomorfa *suriettiva* $f\colon \Delta(0, 1) \to \mathbf{C}$?

10. Siano p e q polinomi in $\mathbf{C}[z]$, con $\deg(q) > \deg(p) + 1$. Sia C un cerchio che contiene tutti gli zeri di q. Mostrare che
$$\int_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 0.$$
(sugg.: provare con q di grado due e p di grado zero).