ARC 2017. Esercizi 3. Stime di Cauchy, Teorema di Liouville, principio di identità, teorema di convergenza di Weierstrass

1. Sia $D \subset \mathbf{R}$ un aperto. Mostrare con un controesempio che il teorema della convergenza di Weierstrass non vale per le funzioni infinitamente differenziabili: esibire una successione di funzioni $f_n : D \to \mathbf{C}$ infinitamente differenziabili per cui $f_n \to f$ uniformemente sui compatti, ma $f'_n \not\to f'$.

2. Sia $D \subset \mathbf{C}$ un aperto e sia $f : D \to \mathbf{C}$ una funzione olomorfa, non identicamente nulla. Dimostrare che l'insieme degli zeri di f in D è al più numerabile (sugg.: D è unione numerabile di compatti).

3. Siano $f,\ g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ due funzioni olomorfe, con $g(z) \neq 0$, for all $z \in \mathbf{C}$, e tali che $|f(z)| \leq |g(z)|$, per ogni $z \in \mathbf{C}$. Dimostrare che esiste una costante $c \in \mathbf{C}$ per cui $f(z) = cg(z)$.

4. Dare un esempio di una serie di potenze $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ che converge su tutto $\mathbf{C}$ ad una funzione non identicamente nulla con infiniti zeri; dare un esempio di una serie di potenze $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ che converge su tutto $\mathbf{C}$ ad una funzione mai nulla.

5. Sia $\{p_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di polinomi tutti di grado minore o uguale ad un N fissato. Mostrare che se $p_n \to p$ uniformemente sui compatti, allora la funzione limite p è un polinomio di grado minore o uguale ad N.